D 7

EINE METHODE ZUR BEHANDLUNG VON POTENTIALTHEORETISCHEN PROBLEMEN MIT FREIEM RAND MIT HILFE DER NICHTLINEAREN OPTIMIERUNG

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Dipl.-Math. Bernhard Steffen
aus Essen

Lehrstühle für numerische und angewandte Mathematik
der Universität Göttingen

Göttingen 1975

Referent: Prof. Dr. R. Kress
Korreferent: Prof. Dr. E.-A. Müller
Tag der mündlichen Prüfung: 30. 4. 1975

D 7

EINE METHODE ZUR BEHANDLUNG VON POTENTIALTHEORETISCHEN PROBLEMEN MIT FREIEM RAND MIT HILFE DER NICHTLINEAREN OPTIMIERUNG

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades der
Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von
Dipl.-Math. Bernhard Steffen
aus Essen

Lehrstühle für numerische und angewandte Mathematik
der Universität Göttingen

Göttingen 1975

Referent: Prof. Dr. R. Kress
Korreferent: Prof. Dr. E.-A. Müller
Tag der mündlichen Prüfung: 30. 4. 1975

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

Die vorliegende Arbeit habe ich an der Universität Göttingen während meiner Tätigkeit als wissenschaftlicher Angestellter an den Lehrstühlen für numerische und angewandte Mathematik angefertigt.

Herr Prof.Dr.R.Kreß hat die Arbeit angeregt und durch seine Diskussionsbereitschaft wesentlich zur Vollständigkeit und Verständlichkeit der Darstellung beigetragen. Ich möchte Herrn Prof. Kreß für seine Unterstützung herzlich danken.

Ebenso möchte ich mich bei allen meinen Lehrern bedanken, insbesondere bei Herrn Prof.Dr.B.Brosowski, dem ich die erste Bekanntschaft mit freien Randwertaufgaben verdanke, und Herrn Prof.Dr.E.A.Müller, dem ich die Einführung in die Strömungsphysik verdanke.

Dank gebührt ebenfalls der Gesellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung Göttingen für die großzügige Bereitstellung von Rechenzeit.

Inhaltsverzeichnis

§ 1	Einleitung	3
	Teil I : Probleme mit freiem Rand als Probleme der nichtlinearen Optimierung	
§ 2	Die mathematische Formulierung von potentialtheoretischen Problemen mit freiem Rand	5
§ 3	Ein Beispiel	10
§ 4	Der Begriff der Näherungslösung	14
§ 5	Die bisher bekannten Verfahren	16
§ 6	Die Formulierung von Problemen mit freiem Rand als Aufgaben der nichtlinearen Optimierung	21
§ 7	Die endlich-dimensionale Approximation des Problems	24
	Teil II : Untersuchungen zur Gleichgewichtskonfiguration eines Plasmatorus in einem Magnetfeld	
§ 8	Das physikalische Problem	29
§ 9	Ein mathematisches Modell der Konfiguration	31
§ 10	Die Formulierung des Modells als Problem mit freiem Rand	36
§ 11	Die Integralgleichung zum Neumannschen Problem	40
§ 12	Die numerische Behandlung der Integralgleichung	45
§ 13	Zur Existenz von Lösungen des Problems im weiteren Sinne	51
§ 14	Die Durchführung der Rechnung	61
§ 15	Die Ergebnisse	67
§ 16	Zusammenfassung und Ausblick	73
	Literaturverzeichnis	75
	Anhang	

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534923_0027

§ 1 Einleitung

Probleme mit freiem Rand ergeben sich in der Physik dort, wo eine ihrer Form nach nicht a priori bekannte Grenzfläche zwischen zwei Medien oder Phasen vorliegt, deren Lage erst aus Gleichgewichtsbedingungen zu erschließen ist. Im Rahmen der Theorie der freien Ränder gilt das Problem als gelöst, wenn die Lage der Grenzfläche bekannt ist.

Von einem potentialtheoretischen Problem mit freiem Rand spricht man, wenn der Zustand einer oder beider Medien bzw. Phasen von der -vektoriellen oder skalaren- Potentialgleichung bestimmt wird. Hierzu gehört ein großer Teil der plasma-, astro- oder strömungsphysikalischen Probleme mit freiem Rand, wie die Berechnung von Strahlen, Totwassern und Vakua in idealen Flüssigkeiten, von Plasma im elektromagnetischen Feld oder Gasmassen im Gravitationsfeld.

Ein bekanntes, besonders einfaches Problem dieser Art ist die Frage nach der Oberflächenform einer Flüssigkeit, die mit einem Gefäß im Schwerefeld der Erde so rotiert, daß die Rotationsachse in Richtung der Schwerebeschleunigung zeigt. Die Gleichgewichtsbedingungen besagen hier, daß sich Druck und Zentrifugalkraft an der Oberfläche der Flüssigkeit gerade aufheben müssen, und die Oberfläche bildet bekanntlich ein Rotationsparaboloid. Hierbei sind sowohl der Druck als auch die Zentrifugalkraft nur vom Ort abhängig, und der Druck läßt sich aus dem bekannten Gravitationsfeld leicht berechnen.

Sehr viel schwieriger wird das Problem, wenn die Gleichgewichtsbedingungen nicht nur vom Ort, sondern auch von der Gestalt des Randes abhängen, was z.B. dann der Fall ist, wenn die Flüssigkeit selbst einen wesentlichen Beitrag zum Gravitationsfeld liefert oder sogar, wie es bei der Untersuchung rotierender Sterne der Fall ist, als alleinige Quelle des Gravitationsfeldes G betrachtet werden kann. G ist dann gegeben als Lösung der Differentialgleichung

$$\operatorname{div} G = \rho(x) \qquad \operatorname{rot} G = 0 \tag{1.1}$$

unter den Nebenbedingungen

$$\lim_{|x| \to \infty} G(x) = 0 \tag{1.2}$$

wobei aber $\rho(x)$ selbst noch unbekannt ist. $\rho(x)$ ergibt sich erst aus der Lösung des Problems.

Zur Behandlung einzelner solcher Probleme wurde eine Reihe von Verfahren entwickelt, die jeweils mehr oder weniger die speziellen Eigenschaften des betrachteten physikalischen Systems zur Lösung ausnutzen.

Im ersten Teil meiner Arbeit werde ich für alle potentialtheoretischen Probleme mit freiem Rand eine einheitliche Art der mathematischen Darstellung entwickeln, die ohne Rückgriffe auf die Anschauung auskommt, sowie eine Methode zur Behandlung solcher Probleme vorstellen, die keinen Gebrauch macht von der konkreten physikalischen Struktur des Problems.

Im zweiten Teil werde ich dann zeigen, wie für ein spezielles Problem, nämlich die Berechnung der Gleichgewichtslage eines toroidalen Plasmas in einem Magnetfeld, eine mathematische Darstellung hergeleitet werden kann, und das in Teil I entwickelte Verfahren auf dieses Problem anwenden. Dabei erhalte ich schon bei geringem numerischen Rechenaufwand gute Ergebnisse, die auch mit den experimentellen Befunden übereinstimmen; den Konvergenzbeweis für das numerische Verfahren kann ich allerdings nicht liefern. Aus physikalischen Überlegungen kann ich aber die Konvergenz plausibel machen, zumindestens für genügend gute Ausgangsnäherungen.

Teil I

Probleme mit freiem Rand als Probleme der nichtlinearen Optimierung.

§ 2 Die mathematische Formulierung von potentialtheoretischen Problemen mit freiem Rand

Aus der Physik ist zu jedem Problem gegeben

a) eine Menge von möglichen Konfigurationen, jeweils bestimmt durch die Lage der Grenzfläche der betrachteten Medien,

b) zu jeder möglichen Konfiguration die auf die Medien wirkenden Kräfte, die sich in der Regel über eine Potentialgleichung berechnen lassen.

Gesucht ist eine Konfiguration, die einen stationären Zustand beschreibt, bei der also die Normalkomponente der Kraft auf der Grenzfläche verschwindet.

Die Auswahl "möglicher" Konfigurationen bedeutet dabei die Ausnutzung der Vorinformation über die Lösung des Problems, sie ist deshalb durch die Problemstellung nicht eindeutig festgelegt.

Dies sei nun am Beispiel der im Schwerefeld der Erde rotierenden Flüssigkeit erläutert.

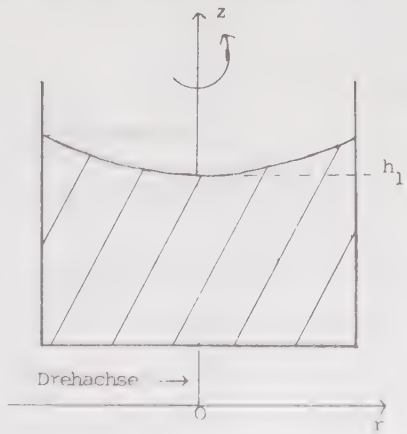
Das Volumen der Flüssigkeit ist vorgegeben, ebenso die Lage der Gefäßwände. Zulässige Grenzflächen sind also zunächst solche, die mit den Gefäßwänden das vorgegebene Volumen einschließen. Aus der Anschauung ist weiter bekannt, daß die Flüssigkeitsoberfläche stetig gekrümmt und konkav ist, was die Menge der möglichen Konfigurationen einschränkt.

Die Gleichgewichtsbedingungen selbst sind folgendermaßen gegeben:

Für das Schwerepotential U gilt

$$\Delta U = \rho \qquad (2.1)$$

wobei ρ die Dichte ist. Es sei nun G das von Masse erfüllte Gebiet (Flüssigkeit und Erde) und $C := \partial G$ der Rand von G. Dann ist U bestimmt durch die Gleichungen:



$$\Delta U = \rho \qquad \text{in } \mathring{G} \qquad (2.1a)$$

$$\Delta U = 0 \qquad \text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \bar{G} \qquad (2.2)$$

$$\lim_{|x| \to \infty} U(x) = 0 \qquad (2.3)$$

$$U^+(x) = U^-(x) \qquad \forall\, x \in C \qquad (2.4)$$

$$\frac{\partial U^+}{\partial n}(x) = \frac{\partial U^-}{\partial n}(x) \qquad \forall\, x \in C \qquad (2.5)$$

wobei U^+ den von außen genommenen Grenzwert darstellt und U^- den von innen genommenen Grenzwert.

Es sei nun die z-Achse die Rotationsachse und P_o der Luftdruck. Dann ist die Oberfläche der Flüssigkeit durch die Gleichung

$$P_o - \rho \cdot U + \rho \cdot w^2 \cdot \frac{x^2+y^2}{2} = 0 \qquad (2.6)$$

bestimmt.

Es ist hier also in $\bar{G}$ und in $\mathbb{R}^3 \setminus \mathring{G}$ jeweils ein Dirichlet-Problem für U gegeben durch die Gleichungen (2.1a), (2.4), (2.6) bzw. (2.2), (2.3), (2.4), (2.6), wobei aber G noch unbekannt ist. Dafür ist in (2.5) auch noch eine Bedingung an die Normalableitung von U auf C gegeben, so daß das Problem zu einem festen G jeweils überbestimmt ist. Das richtige Gebiet G' ist nun gerade dadurch ausgezeichnet, daß dieses überbestimmte Problem in G' lösbar ist. Dies kennzeichnet dieses Problem als ein Problem mit freiem Rand.

Die Betrachtung der im Gefäß rotierenden Flüssigkeit vereinfacht sich nun dadurch, daß man, ohne einen nennenswerten Fehler zu machen, statt mit dem exakten Schwerefeld der Erde U mit der Näherung

$$\tilde{U}(x,y,z) := g \cdot (z-\bar{z}) \qquad (2.7)$$

rechnen kann, bei der nur noch $\bar{z}$ zu bestimmen ist.

Setze ich nun $r := \sqrt{x^2+y^2}$, so ergibt sich aus (2.6)

$$P_o + \rho \frac{w^2}{2} \cdot r^2 - \rho\, g \cdot (z-\bar{z}) = 0 \qquad (2.8)$$

wobei w die Winkelgeschwindigkeit und g die Erdbeschleunigung ist.

$\bar{z}$ berechnet sich aus

$$P_o - \rho\, g\, (h_1 - \bar{z}) = 0 \qquad (2.9)$$

wobei h_1 die Höhe der Flüssigkeit an der Drehachse ist.

Die Oberfläche hat damit die Form eines Rotationsparaboloids, ihre Lage bestimmt sich aus der Volumenbedingung.

Die vollständige Kenntnis einer genügend guten Näherung an das Potential U, die dieses Problem so einfach machte, ist im allgemeinen nicht gegeben. In vielen praktischen Problemen der Strömungs- und Plasmaphysik kennt man aber das Potential im Außenraum, für das dann keine Gleichung mehr zu lösen ist, und das Potential ist im Innenraum harmonisch.

Für diesen Fall werde ich nun eine mathematische Formulierung des Problems angeben. Es bereitet dann keine Schwierigkeiten mehr, auch für allgemeine Fälle(z.B. $\Delta U = \rho$ im Innenraum) eine Formulierung anzugeben, nur ist diese dann entsprechend komplizierter.

Statt mit einer harmonischen Funktion U wie im obigen Beispiel formuliere ich das Problem unter Benutzung eines harmonischen Vektorfeldes v. Dies steht zu U in der Beziehung

$$v = \operatorname{grad} U \tag{2.10}$$

Beide Formulierungen sind also gleichwertig, die vektorielle Form bietet bei mehrfach zusammenhängenden Gebieten einige Vorteile.

Ein solches potentialtheoretisches Problem mit freiem Rand hat dann die Form:

Gegeben sind

1) n Teilmengen G_i des $\mathbb{R}^2$, G_i einfach zusammenhängend,

2) eine Familie $\mathcal{H}$ von n-Tupeln von Abbildungen $H := (H_1,\ldots,H_n)$ mit $H_i : G_i \longrightarrow \mathbb{R}^3$

mit den Eigenschaften:

a) Die Mengen

$$H_i(G_i) := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x = H_i(y),\ y \in G_i\} \tag{2.11}$$

sind fast überall stetig gekrümmte, geschlossene Flächen im $\mathbb{R}^3$.

b) Es gibt genau eine Teilmenge $B(H) \subset \mathbb{R}^3$ mit

$$\text{i) } \partial B(H) = \bigcup_{i=1}^{n} H_i(G_i) \quad , \tag{2.12}$$

ii) B(H) ist beschränkt .

c) $x = H_i(y) = H_j(z) \Rightarrow i=j,\ y=z$

d) Die Abbildung

$\mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^3)$ mit $H \longrightarrow B(H)$ ist injektiv .

3) Zwei Abbildungen

$$D_1 : \mathcal{H} \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} C^1(G_i)$$

$$D_2 : \mathcal{H} \longrightarrow \prod_{i=1}^{n} C^1(G_i)^3$$

mit

$$(n(H_i)(y),\ (D_2(H))_i(y)) = 0 \quad \forall\, y \in G_i,\quad i=1,\dots,n \tag{2.13}$$

wobei $n(H_i)(y)$ die äußere Einheitsnormale an $H_i(G_i)$ im Punkte $H_i(y)$ ist, d.h. $D_2(H)$ beschreibt ein Tangentialfeld auf $\partial B(H)$.

Gesucht ist ein $H' \in \mathcal{H}$, zu dem es ein in $B(H')$ erklärtes Vektorfeld U' gibt mit

$$\operatorname{div} U' = 0 \quad \text{in } B(H') \tag{2.14}$$

$$\operatorname{rot} U' = 0 \quad \text{in } B(H') \tag{2.15}$$

$$[U'(H_i')(y)\ ,\ n(H_i')(y)] = (D_2(H'))_i(y) \quad \forall\, y \in G_i,\quad i=1,\dots,n \tag{2.16}$$

$$(U'(H_i')(y)\ ,\ n(H_i')(y)) = (D_1(H'))_i(y) \quad \forall\, y \in G_i,\quad i=1,\dots,n \tag{2.17}$$

Es ist also zu jedem H aus $\mathcal{H}$ durch (2.14) bis (2.16) in $B(H)$ ein Dirichlet-Problem gegeben und durch (2.14), (2.15) und (2.17) ein Neumann-Problem. Das System (2.14) bis (2.17) ist damit für ein festes H aus $\mathcal{H}$ überbestimmt und im allgemeinen nicht lösbar. Die Aufgabe besteht bei einem Problem mit freiem Rand gerade darin, ein solches H' zu finden, für das dieses überbestimmte Problem lösbar ist. Diese Aufgabe wird dadurch erschwert, daß die Randbedingungen selbst wieder von H abhängen, ohne daß über die Art der Abhängigkeit allgemeine Aussagen gemacht werden können.

Zur Lösbarkeit des Dirichlet- bzw. Neumann-Problems in $B(H)$ müssen die Randwerte, d.h. hier die Abbildungen $D_2(H)$ bzw. $D_1(H)$, noch gewisse Integrabilitätsbedingungen erfüllen (Kreß [8]). Da es hier um sinnvoll gestellte physikalische Probleme geht, kann ich annehmen, daß diese Bedingungen für alle H aus $\mathcal{H}$ erfüllt sind, anderenfalls wäre die Familie $\mathcal{H}$ durch eine Familie von Abbildungen $\widetilde{\mathcal{H}} \subset \mathcal{H}$ zu ersetzen, so daß die Bedingungen für alle H aus $\widetilde{\mathcal{H}}$ erfüllt sind.

Weiter seien, falls nötig, Nebenbedingungen gegeben, die die Lösung des Dirichlet- und Neumann-Problems eindeutig machen.

In einigen Fällen ist ein Teil des Randes $\partial B(H)$ fest vorgegeben, dort sind dann keine Gleichgewichtsbedingungen zu erfüllen. Dadurch verändert sich die Problemstellung wie folgt:

Es sei $\widetilde{\partial B}(H)$ der feste Teil des Randes und

$$\widetilde{G}_i := \{y \in G_i \mid H_i(y) \in \widetilde{\partial B}(H)\} \qquad i=1,\ldots,n \ , \tag{2.18}$$

dann wird eine der beiden Randbedingungen (2.16) bzw. (2.17) nur für $y \in G_i \setminus \widetilde{G}_i$ $(i=1,\ldots,n)$ gestellt, und es fallen entsprechend auch Integrabilitäts- und Eindeutigkeitsbedingungen weg.

Ein konkretes physikalisches Problem ist nun jeweils gekennzeichnet durch Angabe von n; G_i, $(i=1,\ldots,n)$; $\mathcal{H}$; D_1, D_2 sowie gegebenenfalls von Eindeutigkeitsbedingungen. In Teil II werde ich zeigen, wie ein spezielles Problem in dieser Form beschrieben werden kann.

§3 Ein Beispiel

Ein einfaches Beispiel eines solchen freien Randwertproblems, an dem sich aber doch wesentliche Punkte zeigen lassen, ist durch folgende Angaben charakterisiert:

Es sei n=1,

$$G = [0,2\pi) \times (-\pi/2, \pi/2] \tag{3.1}$$

$\mathcal{H}$ sei die Menge der Abbildungen

$$H: G \longrightarrow \mathbb{R}^3 \; ; \; (\phi,\psi) \longrightarrow (r(\phi,\psi), \phi, \psi) \tag{3.2}$$

in Kugelkoordinaten, wobei (ϕ,ψ) aus G sei und $r : G \longrightarrow \mathbb{R}$ eine in ϕ mit der Periode 2π und in ψ mit der Periode π periodische C^∞-Funktion mit $r(\phi,\psi) \neq 0$.

Weiter sei

$$D_1(H)(\phi,\psi) = (e_1, n(H)(\phi,\psi)) \tag{3.3}$$

$$D_2(H)(\phi,\psi) = [e_1, n(H)(\phi,\psi)] \; \frac{1}{r(\phi,\psi)} \iint_G r^2(\phi',\psi')d\phi'd\psi' \tag{3.4}$$

wobei e_1 der Einheitsvektor in x-Richtung ist.

Satz 3.1:

Das durch (3.1) bis (3.4) charakterisierte freie Randwertproblem hat genau eine Lösung, nämlich

$$H': (\phi,\psi) \longrightarrow (\tfrac{1}{2\pi},\phi,\psi);$$

das zugehörige Feld U' ist identisch gleich e_1.

Beweis:

Das durch (2.14), (2.15), (2.17) und (3.3) für jedes H aus $\mathcal{H}$ in B(H) gegebene Neumann-Problem wird offensichtlich durch das Feld $U = e_1$ gelöst.
Da B(H) wegen (3.2) einfach zusammenhängend ist, ist dies die einzige Lösung.

Gesucht ist also nun dasjenige H' aus $\mathcal{H}$, für das gilt:

$$D_2(H') = [e_1, n(H')] , \tag{3.5}$$

das also auch (2.16) erfüllt.

Aus (3.5) und (3.4) folgt nun

$$r'(\phi,\psi) = \iint_G r'^2(\phi',\psi')\,d\phi'\,d\psi' \qquad (3.6)$$

$$\forall\,(\phi,\psi) \text{ mit } n(H')(\phi,\psi) \neq \pm e_1$$

als notwendige Bedingung. Zusammen mit den Glattheitsvoraussetzungen (3.2) ist (3.6) auch hinreichend.

Aus der Forderung $r' \in C^\infty$ und r' periodisch folgt damit sofort

$$r' = 1/2\pi^2$$

und damit die Behauptung.

Es stellt sich nun die Frage, wie sich dieses Lösungsverhalten bei Änderung der Bedingungen ändert.

Zunächst sieht man, daß die Regularitätsvoraussetzungen an den gesuchten Rand eine wesentliche Rolle spielen. Verlangt man nämlich im obigen Beispiel statt $r \in C^\infty$ nur noch $r \in C^0$, so folgt aus (3.6):
$\bar{H} \in \mathcal{H}$ ist eine Lösung des Problems, wenn $\partial B(\bar{H})$ aus Abschnitten einer Kugel mit festem Radius R und Abschnitten von Flächen der Form $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x=\text{const}\}$ zusammengesetzt ist.

Aus der Stetigkeit von r folgt dann

$$B(\bar{H}) = K(0,R) \cap \{(x,y,z);\quad x \geq -a,\quad x \leq b\}$$

wobei R, a, b positiv sind und so gewählt sein müssen, daß (3.6) erfüllt ist.

Eine Änderung der Abbildungen D_1 und D_2 kann das Lösungsverhalten ebenfalls grundlegend ändern. Um dies zu verdeutlichen, betrachte ich nun das folgende Problem:

Es sei G, $\mathcal{H}$ und D_1 wie vorher, D_2 werde ersetzt durch

$$\tilde{D}_2 = D_2 + \varepsilon \cdot \bar{D}_2 \qquad (3.7)$$

mit $\varepsilon > 0$ und

$$\bar{D}_2(H)(\phi,\psi) = [e_2,\, n(H)(\phi,\psi)] \cdot \frac{1}{r(\phi,\psi)} \iint_G r'^2\, d\phi'\, d\psi' \qquad (3.8)$$

wobei e_2 der Einheitsvektor in y-Richtung ist.

Satz 3.2:

Das durch (3.1) bis (3.3), (3.7) gegebene freie Randwertproblem hat keine Lösung.

Beweis:

Wie vorher erhält man als notwendige Bedingung dafür, daß $\bar{H} \in \mathcal{H}$ das Problem löst

$$\tilde{D}_2(\bar{H})(\phi,\psi) = [e_1,(n(\bar{H}))(\phi,\psi)] \quad \forall (\phi,\psi) \in G. \tag{3.9}$$

Durch skalare Multiplikation mit e_1 ergibt sich hieraus

$$(e_1,\tilde{D}_2(\bar{H})) = (e_1,e_1,n(\bar{H})) = 0 \tag{3.10}$$

und hieraus mit (3.4), (3.7) und (3.8)

$$(e_1,e_1,n(\bar{H})) + \varepsilon \cdot (e_1,e_2,n(\bar{H})) = 0 \tag{3.11}$$

woraus folgt

$$(e_3,n(\bar{H})) = 0\,; \tag{3.12}$$

damit könnte aber $\bar{H}(G)$ wegen der Glattheitsbedingungen in (3.2) keine geschlossene Fläche sein, das Problem ist also nicht lösbar.

Das Problem war also nicht korrekt gestellt. Es ist daher zu erwarten, daß Existenz und Eindeutigkeit der Lösung bei freien Randwertproblemen nur dann gesichert werden können, wenn einerseits an $\mathcal{H}$ hinreichend starke Regularitätsforderungen gestellt werden und andererseits die Abbildungen D_1 und D_2 miteinander verträglich sind.

Eine mathematische Theorie, die in diesem Sinne notwendige und / oder hinreichende Bedingungen für die Existenz und / oder Eindeutigkeit von Lösungen freier Randwertprobleme angibt, liegt bisher nicht einmal in Ansätzen vor. Die verschiedenen Ergebnisse bei speziellen Problemen wurden mit sehr unterschiedlichen Methoden gewonnen, die jeweils konkrete Eigenschaften der Probleme ausnutzen und daher nicht allgemein anwendbar sind.

Angesichts des großen praktischen Interesses ist aber die Entwicklung numerischer Verfahren für diese Probleme dennoch gerechtfertigt, und es existiert auch schon eine Vielzahl spezieller Verfahren.

Wegen des ungeklärten Lösungsverhaltens der freien Randwertprobleme sind hier nur solche Verfahren brauchbar, die

1) bei einem lösbaren Problem die Lösung -zumindest näherungsweise- berechnen

und 2) bei einem nicht lösbaren Problem Aussagen über die Struktur des Problems erlauben, insbesondere auch in gewissen Fällen die Unlösbarkeit feststellen.

§4 Der Begriff der Näherungslösung.

Für eine Diskussion von Näherungsverfahren zur Behandlung von Problemen mit freiem Rand muß ich zunächst den Begriff der Näherungslösung erklären. Hier gibt es nun zwei verschiedene Ansätze.

Zum einen kann man unter einer Näherungslösung des Problems ein H aus $\mathcal{H}$ verstehen, bei dem $\partial B(H)$ zu dem zur exakten Lösung H' gehörenden Rand $\partial B(H')$ in einem noch näher zu präzisierenden Sinne geometrisch benachbart ist.

Satz 4.1

Sei für $H,H' \in \mathcal{H}$

$$d_o(H,H') := \max_{x\in G} \min_{x'\in G} |H(x) - H'(x')| \tag{4.1}$$

und

$$d(H,H') := \max (d_o(H,H'), d_o(H',H)), \tag{4.2}$$

dann ist d eine Metrik auf $\mathcal{H}$.

Beweis:

Es ist nur die Dreiecksungleichung zu zeigen.

Seien H, H', $H'' \in \mathcal{H}$. OBdA sei $d(H,H') = d_o(H,H')$.
Wegen der Stetigkeit von H und H' (siehe §2,(2.11)) existiert ein $\bar{x} \in G$ mit $d(H,H') = \min_{x'\in G} |H(\bar{x}) - H'(x')|$.

Nun gilt

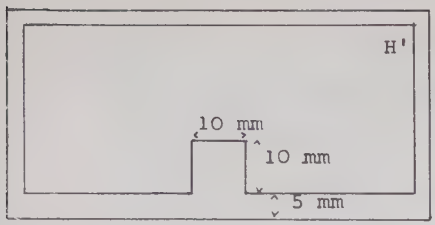
$$d(H,H') \leqslant |H(\bar{x}) - H''(x_1)| + \min_{x'\in G} |H''(x_1) - H'(x')|$$

$$\leqslant |H(\bar{x}) - H''(x_1)| + d(H'',H') \qquad \forall x_1 \in G$$

$$\Rightarrow \quad d(H,H') \leqslant \min_{x\in G} |H(\bar{x}) - H''(x)| + d(H'',H')$$

$$\leqslant d(H,H'') + d(H'',H'),$$

d entspricht dem anschaulichen Begriff vom räumlichen Abstand zweier Flächen.



$d_o(H,H') = 5 \cdot \sqrt{2}$ mm

$d_o(H',H) = 15$ mm

$d(H,H') = 15$ mm

Zum zweiten kann man unter einer Näherungslösung auch ein $H \in \mathcal{H}$ verstehen, zu dem die Bedingungen (2.14) - (2.17) näherungsweise verträglich sind, z.B. in folgender Weise:
Es sei u_H^n die Lösung des durch (2.14) - (2.16) gegebenen Neumannschen Problems,

$$D_3(H) := D_2(H) - [u_H^n, n(H)] \tag{4.3}$$

und

$$A_\infty(H) := \|D_3(H)\|_\infty \ . \tag{4.4}$$

Näherungslösungen des freien Randwertproblems sind nun solche $H \in \mathcal{H}$, für die $A_\infty(H)$ oder ein ähnlich konstruiertes Maß möglichst klein ist.

Dieser Näherungsbegriff ist wesentlich einfacher zu handhaben als der erste, da $A_\infty(H)$ grundsätzlich ermittelt werden kann, während $d(H,H')$ mangels Kenntnis der Lösung H' nicht berechnet werden kann.

Nun stellt sich die Frage, ob eine Näherung im ersten Sinne auch Näherung im zweiten Sinne ist und umgekehrt, ob man also von $A_\infty(H)$ auf $d(H,H')$ schließen kann und umgekehrt.

Eine derartige Fragestellung ist von mir in einer früheren Arbeit untersucht worden [18]; in Teil II werde ich für das dort gestellte Problem einige Überlegungen hierzu anstellen. Allgemein ist diese Frage nicht zu beantworten.

§5 Die bisher bekannten Verfahren

Alle numerischen Verfahren für Probleme mit freiem Rand gehen iterativ vor, und die Iteration läßt sich etwa folgendermaßen beschreiben:

Gegeben sei ein $H_k \in \mathcal{H}$. Hierzu wird dann $D_1(H_k)$, $D_2(H_k)$, $u^n_{H_k}$ und $D_3(H_k)$ ($u^n_{H_k}$ und $D_3(H_k)$ wie in §4 erklärt) berechnet. Aus $D_3(H_k)$ wird dann ein H_{k+1} bestimmt, von dem man hofft, daß $D_3(H_{k+1})$ kleiner ist als $D_3(H_k)$. In welchem Sinne dieses "kleiner" gemeint ist, wird dabei nirgends präzisiert; bei den meisten Verfahren scheint

$$A_\infty(H_{k+1}) := \|D_3(H_{k+1})\|_\infty < A_\infty(H_k) \tag{5.1}$$

gemeint zu sein. Von der so konstruierten Folge $\{H_k\}_{k=1}^\infty$ wird dann erwartet, daß sie für $k \to \infty$ gegen die Lösung H' des Problems konvergiert. Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung wird dabei immer vorausgesetzt. Der Konvergenzbegriff ist dabei wieder ganz von der Anschauung geprägt und wird nirgends mathematisch präzisiert. Eine mögliche mathematische Präzisierung gibt die Metrik d aus dem vorigen Paragraphen, die die Anschauung aber auch nur unvollständig wiedergibt.
Diese Verfahren lassen sich klassifizieren

a) nach der Art, in der die Berechnung von $D_3(H)$, d.h. die Lösung des Neumannschen Randwertproblems, vorgenommen wird, in Differenzenverfahren und Integralgleichungsverfahren ,

b) nach der Art, in der H_{k+1} aus $D_3(H_k)$ berechnet wird.

Die erste Einteilung ist für die Betrachtung von freien Randwertproblemen nicht von wesentlicher Bedeutung, allerdings hat die Auswahl des Verfahrens Einfluß auf den benötigten Rechenaufwand, der bei einigen der Methoden aus b) bei Differenzenverfahren geringer ist, bei anderen bei Integralgleichungsverfahren.

Nach dem Prinzip b) lassen sich die Verfahren in drei Gruppen einteilen:

1. bei den Verfahren der ersten Gruppe wird benutzt, daß das Problem aus der Physik stammt und daß die Funktion $D_3(H)$ im wesentlichen die auf die Grenzfläche wirkende Kraft darstellt.

H_{k+1} wird also so bestimmt, daß $\partial B(H_{k+1})$ gegenüber $\partial B(H_k)$ in Richtung der Normalen an $\partial B(H_k)$ jeweils proportional zu $D_3(H_k)$ verschoben ist (Trefftz[20], Southwell und Vaysey [16], Steffen [19]). Der Proportionalitätsfaktor ist dabei ein freier Parameter des Verfahrens, der geeignet zu wählen ist.

Der Hauptvorteil dieser Verfahren besteht in ihrer Einfachheit und Anschaulichkeit. Dem stehen aber wesentliche Nachteile entgegen. Die Verfahren sind nur auf relativ wenige Probleme anwendbar, und auch bei diesen sind nach den numerischen Erfahrungen Konvergenzgeschwindigkeit und erreichbare Genauigkeit gering.

Dies liegt vermutlich daran, daß diese Verfahren mit lokalen Variationen arbeiten; die an einer Stelle aufgetretene Abweichung vom Gleichgewicht wird durch eine Veränderung des Randes an dieser Stelle zu kompensieren versucht, ohne Rücksicht darauf, welchen Einfluß die Korrektur auf andere Stellen des Randes hat. Hierdurch kommt es vermutlich auch zu dem Effekt, daß die Folge der H_k kleine Schwingungen um eine mittlere Lage zeigt (Steffen [19]). Die Amplitude der Schwingungen kann dadurch etwas verkleinert werden, daß man nicht nur jeweils einen Stützpunkt verschiebt, sondern - mit geringerer Auslenkung - auch die benachbarten Stützpunkte.

2. Die zweite Gruppe von Verfahren (Cryer [5]) wurde zunächst entwickelt zur Lösung von Problemen mit freiem Rand im $\mathbb{R}^2$, bei denen abweichend von der hier untersuchten Situation

a) die zugrundeliegende Differentialgleichung nicht auf

$$\operatorname{div} v = \operatorname{rot} v = 0 \quad \text{bzw.} \quad \Delta u = 0$$

beschränkt ist, sondern eine allgemeinere elliptische Differentialgleichung sein kann, und einschränkend

b) D_1 und D_2 durch reine Funktion des Ortes in $\mathbb{R}^2$ dargestellt sein müssen, d.h. es gibt Abbildungen

$$E_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad E_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \quad \text{mit}$$

$$D_i(H)(y) = E_i(H(y)) \qquad y \in G,\ H \in \mathcal{H},\ i = 1,2.$$

Sie sind aber auch analog erweiterbar auf dreidimensionale Probleme sowie auf solche, bei denen die Bedingung b) jeweils nur in der Umgebung eines vorgegebenen Randes näherungsweise erfüllt ist, wo also etwa gilt:
zu jedem $\bar{H} \in \mathcal{H}$ gibt es Zahlen $\alpha, \delta > 0$ und $C < \infty$ sowie Abbildungen $E_1^{\bar{H}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $E_2^{\bar{H}} : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$, so daß für alle $H \in \mathcal{H}$ mit $d(H,\bar{H}) < \delta$ gilt

$$\max_{y \in G} |D_i(H)(y) - E_i^{\bar{H}}(H(y))| < C \cdot (d(H,\bar{H}))^{1+\alpha}, \qquad i = 1,2, \tag{5.2}$$

d.h. die D_i sind lokal approximierbar durch nur ortsabhängige Felder, und die Näherung ist besser als linear. Dies bedeutet eine Abschwächung der Forderung b).

Dann kann man in dem Iterationsverfahren zur Berechnung von H_{k+1} mit den Feldern E_1, E_2 rechnen, ohne einen allzu großen Fehler zu machen. Je größer δ und α und je kleiner C ist, desto besser ist diese Näherung.

Das von Cryer entwickelte Programm FREEBOUN [5] ist auch anwendbar auf Probleme, die wohl (5.2), nicht aber die Bedingung b) erfüllen.

Diese Verfahren gehen dann wie folgt vor:
$\mathcal{H}$ wird approximiert durch eine n-parametrige Teilmenge $\mathcal{H}^n \subset \mathcal{H}$, die so gewählt sein soll, daß die Lösung H' durch Elemente aus $\mathcal{H}^n$ gut approximiert werden kann.

Es wird dann $H_0 \in \mathcal{H}^n$ vorgegeben. Zu jedem H_k, $k = 0,1,\ldots$ wird das in $B(H_k)$ gegebene Neumann Problem durch Differenzenrechnung näherungsweise gelöst und die Lösung v_k wird über $B(H_k)$ hinaus harmonisch fortgesetzt. Die Stützpunkte x_i des Differenzengitters auf dem Rand werden nun in Richtung der Normalen verschoben bis zu einem Punkt $\bar{x}_i$ mit $[n(x_i), v_k(\bar{x}_i)] = E_2(\bar{x}_i)$,
an dem das Feld v_k also die zweite Randbedingung erfüllt.
$H_{k+1} \in \mathcal{H}^n$ wird dann so bestimmt, daß $\partial B(H_{k+1})$ diese Punkte in einem vorher zu bestimmenden Sinne - etwa nach der Quadratabweichung - bestmöglich approximiert.

Diese Verfahren sind nun starken Einschränkungen unterworfen. Zum einen ist es nicht a priori klar, daß die oben genannte Konstruktion von $\bar{x}_i$ überhaupt durchführbar ist, zum zweiten kann sie aus dem Gebiet herausführen,

für das die Annahme rein ortsabhängiger Randbedingungen noch eine zulässige Näherung ist. In diesem Fall treten die bei den Verfahren der ersten Gruppe genannten Schwierigkeiten auch hier auf. Dazu kommt, daß die Fortsetzung von v_k über den Rand hinaus numerisch instabil ist, hier also große Fehler zu erwarten sind. Nur wenn die Annahme von überwiegend ortsabhängigen Randbedingungen keine wesentliche Vereinfachung der tatsächlich gegebenen Situation darstellt, sind diese Verfahren anwendbar und dann eventuell denjenigen Verfahren, die auf diese Beschränkung verzichten, überlegen.

3.) Bei der dritten Gruppe von Verfahren (Brosowski, de Vries [4], Fox, Sankar [6], Slutz [15]) wird schon eine Diskretisierung vorausgesetzt, d.h. statt H(G) werden nur die Punkte $H(x_i)$, $x_i \in G$, $i=1,\ldots,m$, betrachtet und D_1 und D_2 entsprechend nur auf diesen Punkten vorgegeben. Statt der Differentialgleichung wird dann eine entsprechende diskrete Gleichung betrachtet und statt $\mathcal{H}$ eine 3 m - dimensionale Teilmenge von $\mathcal{H}$, die sich in $\mathbb{R}^{3m}$ einbetten läßt.

Dann kann man D_1, D_2 und D_3 auffassen als i.a. differenzierbare Abbildungen auf $\mathbb{R}^{3m}$, und das so diskretisierte Problem entsprechend als mehrdimensionales Nullstellenproblem mit dem Newton-Ralphston-Verfahren (Brosowski, de Vries [4]), dem Gradientenverfahren (Slutz [15]) oder der verallgemeinerten Regula falsi (Fox, Sankar [6]) behandeln.

Es ist zu erwarten, daß sich diese Methoden auch für das nicht-diskretisierte Problem formulieren lassen, etwa unter Verwendung von Fréchet-Ableitungen, meines Wissens ist dies aber noch nicht geschehen.

Ungeklärt sind hierbei die Fragen nach der Konvergenz sowohl des auf das diskretisierte Problem angewandten Iterationsverfahrens als auch der Lösungen der diskretisierten Probleme gegen die Lösung des kontinuierlichen Problems bei fortlaufender Verfeinerung der Diskretisierung.

Zu diesem zweiten Punkt, der besonders kritisch zu sein scheint, werde ich in §7 einige Bemerkungen machen; Punkt eins ist bei allen Verfahren gleichermaßen wesentlich, und ich werde ihn im Anschluß behandeln.

Die Verfahren der dritten Gruppe haben entsprechend bei einigen Problemen außerordentlich gute Ergebnisse gebracht, (Brosowski, de Vries [4], Fox, Sankar [6]), bei anderen vollständig versagt (z.B. Slutz [15], Steffen [19] für das Newton-Ralphston-Verfahren). Dort, wo diese Verfahren anwendbar sind, scheinen sie den Verfahren der ersten oder zweiten Gruppe überlegen zu sein.

Alle genannten Verfahren haben einen gemeinsamen Nachteil: Es kann nicht allgemein erwartet werden, daß die diskretisierten Probleme, die schließlich behandelt werden, noch lösbar sind. In diesen Fällen ergeben die für die Nullstellensuche entwickelten Verfahren keine konvergenten Prozesse. Die Verfahren niederer Ordnung, etwa aus der Gruppe 1) und 2), ergeben dann Schwingungen um eine mittlere Lage, während die Verfahren höherer Ordnung das folgende Verhalten zeigen: Bei weit von dem Gleichgewicht entfernten Konfigurationen ergeben sie eine schnellere Verbesserung der Konfiguration, um dann in der Nähe des Gleichgewichts umzukippen und zu völlig abwegigen Konfigurationen zurückzukehren. Dieses Verhalten wurde etwa von mir bei Problemen der Vena Contracta für das Gradientenverfahren beobachtet.

§6 Die Formulierung von Problemen mit freiem Rand als Aufgaben der nichtlinearen Optimierung.

Ehe ich meine Methode zur Behandlung dieser Probleme herleiten kann, muß ich die Problemstellung etwas anders formulieren.

Die Voraussetzungen seien wie in §2, weiter sei eine Abbildung $F: \{C^1(G)\}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben mit

a) F ist stetig auf $\{C^1(G)\}^3$
(die Stetigkeit soll sich dabei etwa auf die Topologie der gleichmäßigen Konvergenz beziehen)

b) $F(g) \geqslant 0 \qquad \forall g \in \{C^1(G)\}^3$

c) $F(g) = 0 \iff g = 0$
d.h. $g(y) = (g_1(y), g_2(y), g_3(y))$ mit $g_i(y) = 0$

$$\forall y \in G, \quad i=1,2,3 \ ;$$

weiter wird man meist fordern

d) $F(g) = F(-g)$

e) $f \geqslant g \geqslant 0 \Longrightarrow F(f) \geqslant F(g)$, wobei
$f \geqslant g \iff f_i(y) \geqslant g_i(y) \quad \forall y \in G, \quad i=1,2,3.$

Gesucht wird nun ein $H' \in \mathcal{H}$ mit

$$E := F(D_3(H')) \leqslant F(D_3(H)) \quad \forall H \in \mathcal{H}, \tag{6.1}$$

wobei $D_3(H) = D_2(H) - [u_H^n, n(H)]$

durch (5.1) definiert ist.

Ist $E = 0$, so heißt H' eine Lösung im engeren Sinne und ist dann auch Lösung des ursprünglichen, in §2 formulierten Problems. Ist $E \neq 0$, so heißt H' eine Lösung im weiteren Sinne, und das ursprüngliche Problem hat keine Lösung.

Weiter werde $\mathcal{H}$ mit einer Topologie versehen, z.B. durch die Metrik d aus §4. $\bar{H} \in \mathcal{H}$ heiße dann lokale Lösung des Problems, wenn es eine Umgebung U von $\bar{H}$ gibt, so daß

$$F(D_3(\bar{H})) \leqslant F(D_3(H)) \qquad \forall H \in U \ .$$

Sowohl die Lösungen im weiteren Sinne als auch die lokalen Lösungen sind oft physikalisch interessant, z.B. als

stationäre Ausgangsnäherungen für die Betrachtung instationärer Modelle bzw. allgemein als in einer einfachen Modell gewonnene Näherung an die Beschreibung des physikalischen Geschehens in einem komplizierteren Modell.

In manchen Fällen, z.B. bei einigen Umströmungsproblemen, liefern stationäre Näherungen auch zeitliche Mittelwerte für gewisse Größen wie den Widerstand des zu umströmenden Körpers.

Für den Fall, daß eine Lösung im engeren Sinne nicht existiert, steckt in der Wahl von F natürlich eine gewisse Willkür. Von der passenden Wahl hängt sowohl die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen ab als auch ihre physikalische Interpretierbarkeit. Die Bedingungen d) und e) schließen hier allzu krasse Mißgriffe aus.

Für die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen im erweiterten Sinne gibt es aus der Theorie der nichtlinearen Optimierung eine Reihe von Kriterien, die dann im Einzelfall überprüft werden müssen. Die meisten dieser Kriterien setzen allerdings eine Struktur des Problems voraus, die nicht gegeben bzw. nicht nachweisbar ist, so daß man sich oft nur auf das einfachste Kriterium stützen kann: (s.Teil II, §13)

Eine Lösung im erweiterten Sinne existiert, wenn $F \circ D_3$ auf $\mathcal{H}$ stetig ist und es eine Zahl $K < +\infty$ gibt, so daß die Menge

$$\mathcal{H}_K := \{H \in \mathcal{H} \mid F(D_3(H)) < K\}$$

nicht leer und kompakt ist.

Eine - ebenfalls noch recht einfache - Bedingung für die Eindeutigkeit ist:

Es sei $\mathcal{H}$ eine konvexe Teilmenge eines topologischen Vektorraumes, und die Abbildung $\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$, $H \longrightarrow F(D_3(H))$, sei strikt konvex. Dann gibt es höchstens eine Lösung im weiteren Sinne.

Beweis:

Seien H_1, H_2 Lösungen im weiteren Sinne, so ist $\bar{H} := \frac{1}{2} H_1 + \frac{1}{2} H_2 \in \mathcal{H}$, und wegen der strikten Konvexität von $F \circ D_3$ gilt $F(\bar{H}) < F(H_1) = F(H_2)$, im Widerspruch zur Annahme, daß H_1 und H_2 Lösungen seien.

Diese oder andere Bedingungen müssen dann für ein konkretes Problem überprüft werden, um Aussagen über das Lösungsverhalten zu gewinnen. Hierbei helfen oft physikalische Überlegungen weiter.

Aussagen über lokale Lösungen oder Lösungen im weiteren Sinne sind jedenfalls sehr viel leichter zu erhalten als Aussagen über Lösungen im engeren Sinne. Ob dann eine gefundene lokale Lösung H' auch Lösung im engeren Sinne ist, kann dann durch Berechnung von $F(D_3(H'))$ leicht überprüft werden.

§7 Die endlich-dimensionale Approximation des Problems

Für die Durchführung der Rechnung muß das Problem endlich-dimensional approximiert werden.

Es sei $\mathcal{H}$ wieder mit einer Topologie versehen, z.B. mit der durch die Metrik d aus §4 induzierten Topologie. $\{\mathcal{H}^i\}_{i=1}^{\infty}$ sei eine aufsteigende Folge von Teilmengen von $\mathcal{H}$ (d.h. $\mathcal{H}^1 \subset \mathcal{H}^2 \subset \mathcal{H}^3 \ldots$), für die gilt:

$$\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^n} = \mathcal{H} \tag{7.1}$$

Ich setze

$$E := \inf_{H \in \mathcal{H}} F(D_3(H)) \tag{7.2}$$

$$E_n := \inf_{H \in \mathcal{H}^n} F(D_3(H)) \tag{7.3}$$

Satz 7.1

Ist die Abbildung $\mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}$, $H \longrightarrow F(D_3(H))$ stetig, so gilt

$$\lim_{n \to \infty} E_n = E$$

Beweis:

Nach Definition von E gibt es eine Folge

$\{H_i\}_{i=1}^{\infty}$, $H_i \in \mathcal{H}$, mit $F(D_3(H_i)) < E + \frac{1}{i}$.

Weiter gibt es zu jedem i ein δ_i, so daß

$$F(D_3(H)) < F(D_3(H_i)) + \frac{1}{i} \quad \forall H \text{ mit } d(H,H_i) < \delta_i ,$$

und wegen (7.1) gibt es ein $N = N(i)$, so daß es ein $\bar{H}_i \in \mathcal{H}^N$ gibt mit $d(H_i,\bar{H}_i) < \delta_i$. OBdA sei $N > i$.

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} E_n \leq E_N \leq E + \frac{2}{i} \qquad \forall i$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} E_n \leq E \qquad \Rightarrow \lim_{n \to \infty} E_n = E.$$

Es sei nun zusätzlich vorausgesetzt, daß das Problem in $\mathcal{H}$ eine eindeutige Lösung H' hat. Weiter gelte

$$F(D_3(H)) \geq f(d(H,H')) \geq 0 \quad \forall H \in \mathcal{H} \tag{7.4}$$

mit einer stetigen, monoton wachsenden Funktion f. Dann gilt

Satz 7.2:

Sei $\bar{H}_n \in \mathcal{H}^n$ mit $F(D_3(\bar{H}_n)) \leq E_n + \frac{1}{n}$,

so ist $\lim_{n \to \infty} d(\bar{H}_n, H') = 0$

Beweis:

Nach Satz 7.1 gilt

$$\lim_{n \to \infty} F(D_3(\bar{H}_n)) = F(D_3(H')) \ ;$$

daraus folgt mit (7.4)

$$\lim_{n \to \infty} f(d(\bar{H}_n, H')) = 0$$

und, da f stetig und streng monoton ist,

$$\lim_{n \to \infty} d(\bar{H}_n, H') = 0.$$

In vielen Fällen sind die Voraussetzungen von Satz 7.2 nicht beweisbar, dann erlaubt das Verhalten der Werte $d(H_{n+1}, H_n)$ noch gewisse Rückschlüsse auf die Konvergenz des Verfahrens.

Für die Rechnung muß man das Problem parametrisieren, d.h. man sucht eine aufsteigende Folge von Teilräumen $\mathcal{H}^n$, die außer (7.1) noch folgende Bedingungen erfüllen:

Es existieren Abbildungen $Q^n : \mathcal{H}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ mit

1) Q^n ist injektiv und stetig.

2) sei $M_n := \mathrm{Im}(Q^n)$. Die Abbildung

$P^n : M_n \longrightarrow \mathcal{H}^n$ mit $P^n = (Q^n)^{-1}$ ist stetig.

Dann läßt sich das Optimierungsproblem in $\mathcal{H}$ ersetzen durch eine Folge von Optimierungsproblemen in M_n, n = 1,2,3... der Form:

Sei $\widetilde{F}(x) := F(D_3(P^n(x)))$ $\forall x \in M_n$. Gesucht ist ein $x_n' \in M_n$ mit

$$\widetilde{F}(x_n')) \leqslant \widetilde{F}(x) \qquad \forall x \in M_n.$$

Damit diese Parametrisierungen von $\mathcal{H}^n$ genügend handlich sind, wird man noch fordern:

3) Sei $H \in \mathcal{H}^{n-1}$, $Q^{n-1}(H) = x$, $Q^n(H) = \bar{x}$,

$x = (x_1,\ldots,x_{n-1})$; $\bar{x} = (\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n)$, so gilt

$x_i = \bar{x}_i$, $i = 1,\ldots,n-1$; $\bar{x}_n = 0$.

Sei umgekehrt $\bar{x} \in M_n$ mit $\bar{x}_n = 0$, so ist

$P^n(x) \in \mathcal{H}^{n-1}$.

Weiter ist noch die folgende Forderung sinnvoll, um das Konvergenzverhalten in $\mathcal{H}$ aus dem Konvergenzverhalten in M_n entnehmen zu können:

4) Es gibt Zahlen L_1, L_2 mit $0 < L_1 \leqslant L_2 < \infty$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $x,x' \in M_n$ gilt

$L_1 \cdot \|x - x'\| \leqslant d(P^n(x'),P^n(x)) \leqslant L_2 \cdot \|x - x'\|$.

wobei die Norm in $\mathbb{R}^n$ geeignet zu wählen ist.

Die Berechnung von $\widetilde{F}(x)$, $x \in M_n$, verlangt nun jeweils die Lösung eines vektoriellen Neumann-Problems, das seinerseits wieder endlich-dimensional approximiert werden muß. Dabei wird auch die Abbildung D_3 ersetzt durch eine diskrete Abbildung $D_3^m : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ auf folgende Weise:

Es werden Punkte $\phi_1,\ldots,\phi_m$ aus G ausgewählt. Zu $H \in \mathcal{H}$ bezeichne $(u_i(H))_{i=1}^m$ ein Tupel von Vektoren, das

a) in B(H) einer diskreten Gleichung genügt, die durch Diskretisation von rot u = div u = 0 hervorgeht und

b) der Bedingung

$D_1(H)(\phi_i) = (n(H)(\phi_i), u_i(H))$, $i = 1,\ldots,m$

genügt.

$D_3^m(H)$ sei dann definiert durch

$$(D_3^m(H))_i = (D_2(H)(\phi_i) - [n(H)(\phi_i), u_i(H)]) \quad i = 1,\ldots,m.$$

Ebenso wird F ersetzt durch eine Diskretisierung F^m.
Wegen der in §2 gestellten Regularitätsbedingungen an $\mathcal{H}$ ist es möglich, die Diskretisation des Neumannschen Problems so zu wählen, daß

$$\lim_{m \to \infty} F^m(D_3^m(H)) = F(D_3(H)) \qquad \forall H \in \mathcal{H} .$$

Die Optimierungsprobleme in $\mathbb{R}^n$ müssen also selbst noch approximiert werden durch eine Folge von Problemen der folgenden Art:

Gesucht ist ein $\hat{x}_n^m \in M_n$, so daß

$$F^m(\hat{x}_n^m) \leqslant F^m(x) \qquad \forall x \in M_n .$$

Diese Probleme schließlich kann man nun mit den Methoden der nichtlinearen Optimierung, z.B. mit dem Davidon-Fletcher-Powell-Verfahren, näherungsweise lösen. Alle hierzu benötigten Rechenschritte lassen sich bis auf Rundungsfehler exakt ausführen, es sind dann also keine weiteren Approximationen mehr notwendig.

In der Praxis ist nun eine Koppelung von m an n erwünscht, d.h. statt

$$\lim_{n \to \infty} \left(\lim_{m \to \infty} F^m(\hat{x}_n^m) \right) \quad \text{zu berechnen, berechnet man}$$

$$\lim_{n \to \infty} F^{m(n)}(\hat{x}_n^{m(n)})$$

und ebenso

$$\lim_{n \to \infty} P^n(\hat{x}_n^{m(n)}) \quad \text{statt} \quad \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{m \to \infty} P^n(\hat{x}_n^m) \right).$$

Wegen Satz 7.1 und Satz 7.2.ist diese Vereinfachung bei geeigneter Wahl der Funktion m(n) zulässig.

Eine "geeignete" Wahl heißt sicherlich, daß m(n) so gewählt sein muß, daß das Gleichungssystem

$$D_3^m(P^n(x))_i = 0, \quad i = 1,\ldots,m \ , \ \forall x \in M_n$$

mindestens ebenso viele Gleichungen wie freie Parameter hat, um die Diskretisationsfehler in erträglichen Grenzen zu halten.

Dies bedeutet in der Regel $m \geq n$, günstiger noch $m > n$.

Die Methode, $H \in \mathcal{H}^n$ zu definieren als interpolierende Fläche der Stützpunkte $H(\phi_i)$, $i = 1,\ldots,m$, und die Koordinaten dieser Punkte als Parameter zu wählen, setzt $n = m$ und ist damit mit m an der unteren Grenze des Zulässigen. Sie ist also mit besonderen Risiken verbunden, was sich auch numerisch oft bestätigt hat.

Die Auswahl der Teilräume $\mathcal{H}^n$ sowie die Art der Parametrisierung sind, obwohl für die Theorie unwesentlich, in der Praxis von überragender Bedeutung für das Gelingen der Rechnung.

Die Auswahl der Teilräume soll dabei so geschehen, daß die zu erwartende Lösung schon bei einem möglichst kleinen n gut approximiert werden kann. Hier muß also die aus der Physik gegebene Information über die zu erwartende Lösung ausgenutzt werden.

Die Wahl der Parametrisierung sollte so geschehen, daß die anzuwendenden Optimierungsverfahren möglichst schnell konvergieren und möglichst stabil gegen Rundungsfehler sind. Dies ist erfahrungsgemäß der Fall, wenn die Variationen der einzelnen Parameter voneinander unabhängige Ergebnisse haben, die Änderung eines Parameters also nicht - auch nicht angenähert - durch eine Änderung eines anderen Parameters kompensiert werden kann. Dies ist zu erwarten, wenn die Zeilen der Funktionalmatrix der Abbildung $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $x \longrightarrow D_3^m(H(x))$ paarweise orthogonal sind, was allerdings oft nicht ohne weiteres zu erreichen ist. Zumindest sollte die Parametrisierung aber so gewählt werden, daß die Zeilen linear unabhängig sind.

Für die numerische Lösung des diskretisierten Problems bietet die Theorie der nichtlinearen Optimierung eine Anzahl erprobter Verfahren an, die für verschieden geartete Probleme besonders geeignet sind. Die Wahl des Verfahrens muß dann von den Eigenschaften des Problems abhängen..

Im folgenden Teil II der Arbeit werde ich nun ein konkretes Problem mit freiem Rand vorstellen und zeigen, wie sich die hier entwickelte Methode auf dieses Problem anwenden läßt.

Teil II

Untersuchungen zur Gleichgewichtskonfiguration eines Plasmatorus in einem Magnetfeld.

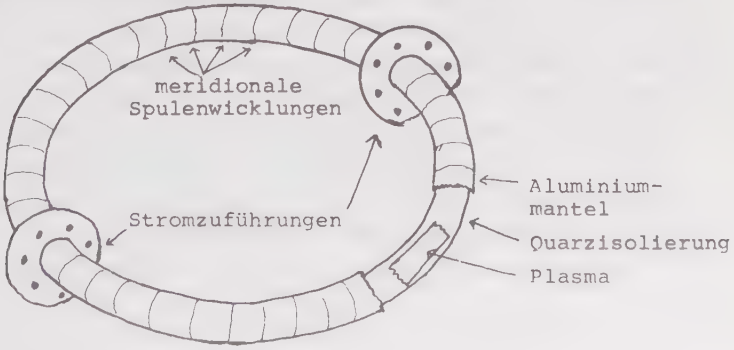
§8 Das physikalische Problem

Die Gewinnung von Energie durch kontrollierte Kernfusion erfordert die Erzeugung eines Wasserstoff-Plasmas von einer Temperatur von einigen 10^8 K und dessen Stabilisierung für eine Zeit von mindestens einigen Millisekunden. Dieses Ziel wird angestrebt durch die Einschließung des Plasmas in starken Magnetfeldern. Die dazu verwandten Apparate lassen sich in drei Gruppen einteilen:

a) Die Stellaratoren, die zuerst von L.Spitzer [17] vorgeschlagen wurden und theoretisch und praktisch vor allem im Rahmen des Projekts Matterhorn an der Princeton University untersucht wurden.
b) Die zylindrischen Pinch-Konfigurationen, die für sehr kurze Zeiten sehr hohe Temperaturen erreichen und z.B. von Becker u.a. [1] in Karlsruhe untersucht wurden.
c) Die toroidalen Pinch-Konfigurationen, die bisher nur geringere Temperaturen erreichen, diese aber über sehr viel längere Zeiten aufrecht erhalten können.

Solche Konfigurationen wurden u.a. am Max-Planck-Institut für Plasmaphysik in München untersucht, sie sollen nun auch Gegenstand der folgenden Untersuchungen sein.

Der Aufbau eines Apparates zur Erzeugung eines toroidalen Pinches ist etwa in der Arbeit von Karr, Knapp und Osher [7] ausführlich beschrieben.



Die hier gegebene kurze Beschreibung soll nur dem besseren Verständnis des folgenden dienen.

Das Plasma ist enthalten in einem Torus aus Quarzglas, welcher in einem Torus aus Aluminium steckt. Die Funktion des Quarzglases ist dabei nur, das Plasma von der leitenden Hülle zu isolieren und ein möglichst verlustfreies Vakuum zu garantieren. Durch den Aluminiummantel wird in azimutaler Richtung der Entladungsstrom einer Kondensatorbank geschickt; dieser induziert im Plasma einen Strom, durch dessen Magnetfeld das Plasma komprimiert wird. Eine Spule, deren Windungen in meridionaler Richtung um den Torus herumlaufen, erzeugt ein Magnetfeld, dessen Einfluß das Plasma stabilisiert.

Bei der von Karr u.a. beschriebenen Konfiguration hat der Torus einen Radius von 35cm, und sein Querschnitt ist ein Kreis von 7cm Radius. Dieses Verhältnis der Radien ist auch bei einer Reihe weiterer derartiger Konfigurationen von der gleichen Größenordnung.

Die Kondensatorbank hat eine Kapazität von 450µF und wird mit etwa 12,5kV geladen. Das von der Spule erzeugte axiale Feld hat eine Stärke von bis zu 4.000 Gauss. Damit wird eine Kompression des Plasmas auf etwa ein Viertel seines Ausgangsvolumens erzielt, und diese Kompression bleibt für etwa 50µsek erhalten.

Hier ergeben sich nun einige Fragen:

1) Gibt es eine stationäre Konfiguration des Plasmas, und wenn ja, wo liegt diese?
2) Wie stabil ist diese Konfiguration?
3) Welche stabilisierenden Maßnahmen sind möglich?

Für den Fall, daß die Frage 1) mit nein beantwortet werden muß,wäre 2) die Frage nach der Lebensdauer der Konfiguration und 3) die Frage nach Maßnahmen zur Verlängerung der Lebensdauer. Da diese Fragen im Gegensatz zur mehr theoretischen Frage 1) von großer praktischer Bedeutung sind, sind sie sehr ausführlich untersucht worden, u.a. von Lüst, Suydam, Richtmeyer und Rotenberg [10] und von E.Martensen [13]. Darum will ich hier nur die Frage der Stationarität behandeln, die meines Wissens bisher nicht näher untersucht wurde.

§ 9 Ein mathematisches Modell der Konfiguration

Die Frage nach einer stationären Konfiguration ist ganz wesentlich abhängig von dem mathematischen Modell, das verwendet wird. Da die für die Stationarität notwendige Annahme eines konstanten Stromes in dem Aluminiummantel schon einen sehr starken Eingriff bedeutet, scheint es mir nicht mehr sinnvoll zu sein, die Effekte der Plasmaphysik in dem Modell vollständig zu berücksichtigen, ich werde also für das Plasma ein sehr einfaches Modell zugrundelegen. Die Ergebnisse liefern entsprechend nur ein grobes Bild der Realität und können evtl. als Ausgangspunkt für detailliertere Rechnungen dienen. Ein vollständiges mathematisches Modell eines Plasmas im elektromagnetischen Feld haben Bernstein u.a. [3] entwickelt. Diesem gegenüber mache ich folgende vereinfachende Annahmen:

1) Der Aluminiummantel hat unendliche Leitfähigkeit. Hieraus folgt für das mathematische Modell, daß das Magnetfeld den Mantel nicht durchsetzt.
2) Der Strom ist zeitlich konstant.
3) Das Plasma ist elektrisch neutral.
4) Der im Plasma induzierte Strom ist auf die Grenzfläche zwischen Plasma und Vakuum beschränkt.
5) Im Plasma treten keine Strömungen auf.

Die Annahme 1) dürfte das Ergebnis nicht wesentlich beeinflussen, die Leitfähigkeit des Aluminiums ist genügend groß. 2) ist nur während einer kurzen Zeitspanne mit genügender Genauigkeit erfüllt, während der das Plasma die maximale Kompression erfährt. Da aber gerade diese Kompression hier von Interesse ist, bildet die Annahme noch eine zulässige Vereinfachung. Die Annahmen 3) und 4) sind jeweils zu Beginn des Versuchsablaufes gut erfüllt, erst nach Erreichen der maximalen Kompression des Plasmas machen sich hier größere Abweichungen bemerkbar. Einen Teil dieser Abweichungen werde ich noch berücksichtigen können (siehe Ende von § 9). Die Annahme 5) ist nicht erfüllt; in der Anlaufphase des Versuchs wird das Plasma von einer Serie von Verdichtungsstössen durchlaufen, später kommt es zu einer Rotation des gesamten

Plasmatorus. Die auftretenden Geschwindigkeiten sind aber nicht so groß, daß ein wesentlicher Teil der Energie des Plasmas kinetische Energie wäre. Die Vernachlässigung dieser Strömungen ist also - wenn auch mit Einschränkungen - akzeptabel.

Die Konfiguration läßt sich dann etwa wie folgt mathematisch beschreiben:
Das vom Plasma erfüllte Gebiet hat die Geometrie eines Torus, es ist also zweifach zusammenhängend. Es sei $\mathcal{P}$ genannt, und sein Rand sei S_1. Es ist umschlossen von einem dreifach zusammenhängenden Vakuumgebiet $\mathcal{V}$, das nach außen durch den Aluminiummantel begrenzt ist. Diesen bezeichne ich mit S_2. Unter Umständen, z.B. wenn im Mantel kein Strom fließt, ist $\mathcal{V}$ leer, d.h. $S_1 = S_2$. Dieser Fall ist aber, ebenso wie alle Fälle, in denen $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, im allgemeinen uninteressant, ich kann also voraussetzen $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Auf dem Rand S_1 wirkt der Innendruck p des Plasmas im Sinne einer Vergrößerung von $\mathcal{P}$ sowie die vom im Plasma induzierten Strom zusammen mit dem Magnetfeld des im Mantel fließenden Stroms hervorgerufene Lorentzkraft im Sinne einer Verkleinerung von $\mathcal{P}$. Die Konfiguration ist stationär, wenn beide Kräfte gleich sind.
Es sei p der Gasdruck, ρ die Dichte des Gases, κ der Adiabatenexponent ($\kappa = c_p/c_v$), $\mathcal{H}$ das Magnetfeld im Plasma und $\mathcal{H}'$ das Vakuummagnetfeld. Bei einer stationären Konfiguration bestehen zwischen diesen Größen die Beziehungen (siehe auch Martensen [13])

$$\operatorname{grad} p + \frac{1}{4\pi} [\, \mathcal{H}, \operatorname{rot} \mathcal{H} \,] = 0 \text{ in } \mathcal{P} \tag{9.1}$$

(Bewegungsgleichung)

$$\operatorname{div} \mathcal{H} = 0 \text{ in } \mathcal{P} \tag{9.2}$$

$$\rho^{\kappa} \cdot \text{const} = p \text{ in } \mathcal{P} \tag{9.3}$$

(Adiabatengleichung)

$$\mathcal{H}'^2 - \mathcal{H}^2 - 8\pi p = 0 \text{ auf } S_1 \tag{9.4}$$

(Bewegungsgleichung auf dem Rand)

wobei alle Werte als äußere bzw. innere Grenzwerte zu nehmen sind.

Weiter gilt nach Bernstein u.a. [2]

$$(n, \mathcal{H}) = 0 \quad \text{auf } S_1 \tag{9.5}$$

$$(n, \mathcal{H}') = 0 \quad \text{auf } S_1 \tag{9.6}$$

wobei n die Flächennormale an S_1 ist,

$$\operatorname{div} \mathcal{H}' = 0 \quad \text{in } \mathcal{V} \tag{9.7}$$

$$\operatorname{rot} \mathcal{H}' = 0 \quad \text{in } \mathcal{V} \tag{9.8}$$

$$(n', \mathcal{H}') = 0 \quad \text{auf } S_2 \tag{9.9}$$

wobei n' die Flächennormale an S_2 ist, wegen der unendlichen Leitfähigkeit auf S_2.
Aus der Annahme 4) folgt nun

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = 0 \quad \text{in } \mathcal{P} \tag{9.10}$$

und damit aus (9.1)

$$p = \text{const} \quad \text{in } \mathcal{P} \tag{9.11}$$

Vorgegeben sind zu diesen Gleichungen:
S_2 durch die Geometrie des Aluminiummantels ,

$\int_{S_2} [n', \mathcal{H}'] \, do$ durch den Strom,

κ durch die Zusammensetzung des Plasmas, - für ein reines Wasserstoffplasma ist $\kappa = 5/3$ -
und die Konstante in (9.3) ist gegeben durch die Anfangsdichte ρ_o und den Anfangsdruck p_o.
Zu bestimmen sind S_1, $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$, p, ρ.

Die Magnetfelder $\mathcal{H}$ und $\mathcal{H}'$ sind also jeweils Lösungen des homogenen Neumannproblems in den entsprechenden Gebieten, wobei die Lage von S_1 noch unbekannt ist. Nach Blanks, Friedrichs und Grad [3] läßt sich eine Lösung α eines homogenen Neumannproblems in einem beschränkten Gebiet G des $\mathbb{R}^3$ darstellen als

$$\mathcal{A} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \mathcal{A}^i \quad , \tag{9.12}$$

wobei $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,m$ und $\mathcal{A}^i$, $i = 1,\ldots,m$ diejenigen Lösungen sind, für die

$$\int_{\gamma_j} (\mathcal{A}^i, ds_j) = \delta^i_j \qquad i,j = 1,\ldots,m \tag{9.13}$$

ist. Dabei bilden die γ_j ein maximales System nicht-homotoper Kurven im Gebiet G. Für einen Torus ist $m = 1$, und die Lösung $\mathcal{A}^1$ ist gegeben durch

$$\mathcal{A}^1 = \frac{1}{2\pi r} \cdot e_a \quad , \tag{9.14}$$

wobei r der Abstand von der Drehachse ist und e_a der Einheitsvektor in Richtung des Azimuts.

Für das Gebiet $\mathcal{V}$ ist $m = 2$, und ein Feld $\mathcal{A}'$ hat in $\mathcal{V}$ die Darstellung

$$\mathcal{A}' = \alpha_1 \cdot \frac{1}{2\pi r} \; e_a + \alpha_2 \; \mathcal{A}'^2, \tag{9.15}$$

wobei dann $\mathcal{A}'^2$ ein Neumannsches Feld in $\mathcal{V}$ ist, dessen Feldvektor keine azimutale Komponente hat.

Setze ich diese Ergebnis in die Gleichungen (9.1) - (9.9) und (9.11) ein, so erhalte ich folgende Beziehungen:

Es ist

$$\mathcal{L} = \beta/2\pi r \cdot e_a \tag{9.16}$$

$$\mathcal{L}' = \beta'/2\pi r \cdot e_a + \mathcal{L}'_2 \tag{9.17}$$

wobei $\mathcal{L}'_2$ keine azimutale Komponente hat.

(9.4) geht über in

$$(\mathcal{L}'_2)^2 - (\beta^2 - \beta'^2)/(r^2 \cdot 4\pi^2) - 8\pi p = 0 \tag{9.18}$$

$$\operatorname{div} \mathcal{L}'_2 = \operatorname{rot} \mathcal{L}'_2 = 0 \quad \text{in} \quad \mathcal{V} \tag{9.19}$$

$$(n, \mathcal{L}'_2) = 0 \quad \text{auf} \quad S_1 \tag{9.20}$$

$$(n', \mathcal{L}'_2) = 0 \quad \text{auf} \quad S_2 \tag{9.21}$$

und aus (9.11) und (9.3) folgt

$$p = p_o \cdot (V/V_o)^{\kappa} \tag{9.22}$$

wobei V das von S_1 und V_o das von S_2 eingeschlossene Volumen ist.

β' wird dabei vorgegeben durch den meridionalen Strom in der den Aluminiummantel umschliessenden Spule; β ergibt sich aus diesem Strom sowie einem eventuell auf S_1 fließenden meridionalen Strom. Letzterer ist im Rahmen der rein hydromagnetischen Theorie nicht vorgegeben, es wäre also anzusetzen $\beta = \beta'$. Bei einer genaueren Betrachtung, etwa mit Hilfe des Zweikomponentenmodells des Plasmas, ergibt sich hier aber eine von Null verschiedene meridionale Stromstärke auf S_1, die in komplizierter Weise von den äußeren Strömen abhängt. Dieser Tatsache trage ich dadurch Rechnung, daß ich die Konfigurationen jeweils für eine Anzahl verschiedener Werte von $(\beta^2 - \beta'^2)$ betrachte. Eine genaue Berechnung von β aus den Vorgaben würde den hier gegebenen Rahmen sprengen.

Der Wert von $(\beta^2 - \beta'^2)$ ist dabei so zu wählen, daß der Ausdruck $(\beta^2 - \beta'^2)/(r^2 \cdot 4\pi^2) + 8\pi p$ strikt positiv ist.

Aus den experimentellen Untersuchungen weiß man weiter daß der Querschnitt des Plasmagebietes konvex ist.

§ 10 Die Formulierung des Modells als Problem mit freiem Rand

Mit dem bisher Gesagten sind nun die Voraussetzungen für eine Formulierung als potentialtheoretisches Problem mit freiem Rand im Sinne von §2 gegeben, die ich nun vornehmen werde.

Zunächst sei der $\mathbb{R}^3$ mit Zylinderkoordinaten (x,y,δ) versehen, $(x \geq 0,\ y \in \mathbb{R},\ \delta \in [0,2\pi))$; aus diesen berechnen sich die kartesischen Koordinaten $(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ auf folgende Weise:

$$\bar{x} = x \cos \delta; \quad \bar{y} = x \sin \delta, \quad \bar{z} = y \,. \tag{10.1}$$

Sei weiter ein $M > 0$ vorgegeben. Dann definiere ich toroidale Koordinaten (r,ϕ,ψ) bezüglich M durch die Beziehungen

$$x = M + r \cos \phi; \quad y = r \sin \phi, \quad \delta = \psi \,. \tag{10.2}$$

Diese Koordinaten sind besonders geeignet zur Beschreibung eines Torus mit Achsenradius M, z.B. hat ein Kreistorus mit Radius $a < M$ die Form

$$T := \{(r,\phi,\psi) \mid r \leq a < M\}.$$

Es bedeute nun im folgenden
M_1 die Achse von S_1, M_2 die Achse von S_2, p_o den Anfangsdruck, κ den Adiabatenexponenten ($\kappa = c_p/c_v$), R den Radius von S_2, A den auf dem äußeren Mantel fließenden Strom und
$c := (\beta^2 - \beta'^2)/4\pi^2$ (siehe (9.18)).

Es sei nun

1) $G_1 = G_2 = [0,2\pi) \times [0,2\pi)$

2) $\mathcal{H} = \{H = (H_1,H_2) \mid H_i : G_i \longrightarrow \mathbb{R}^3$ mit den Eigenschaften a),b) und c)$\}$

   a) M_1 sei gegeben, dann sei

   $$H_1(\phi,\psi) := (r(\phi),\phi,\psi) \qquad (\phi,\psi) \in G_1 \tag{10.3}$$

   in toroidalen Koordinaten bezüglich M_1, wobei r eine Funktion aus $C^2_{2\pi}$ ist.

b) Es seien M_2, R vorgegeben, und

$$H_2(\phi,\psi) = (R,\phi,\psi) \quad \forall(\phi,\psi) \in G_2, \tag{10.4}$$

d.h. H_2 beschreibt den - festen - Rand S_2 .

c) $H_1(G_1)$ ist ganz innerhalb von $H_2(G_2)$ gelegen.

Wegen der Konvexität von S_1 ist (10.3) keine Einschränkung der zulässigen Konfigurationen.

3) Es sei $D_1(H) = 0 \qquad \forall H \in \mathcal{H}$ (10.5)

4) Sei V(H) das von $H_1(G_1)$ eingeschlossene Volumen, V_o das von $H_2(G_2)$ eingeschlossene Volumen, c, p_o und κ seien vorgegeben und

$$p = p_o \, (V_o/V(H))^{\kappa}.$$

Weiter sei für $(\phi,\psi) \in G_i$ $e_a^i(\phi,\psi)$ der Einheitsvektor in azimutaler Richtung in der Tangentialebene an $H_i(\phi,\psi)$.

Dann sei

$D_2 : \mathcal{H} \longrightarrow \{C^1(G_1)\}^3$ gegeben durch

$$D_2(H)(\phi,\psi) = \sqrt{8\pi p - c/x^2(\phi,\psi)} \cdot e_a^1(\phi,\psi) \tag{10.6}$$

$$\forall (\phi,\psi) \in G_1,$$

wobei $x(\phi,\psi)$ nach (10.2) den Wert $M_1 + r(\phi)\cdot\cos\phi$ hat.

Gesucht ist ein $H' \in \mathcal{H}$, so daß es ein in dem zwischen $H_1'(G_1)$ und $H_2'(G_2)$ gelegenen Gebiet V harmonisches Vektorfeld $\mathcal{L}_2'$ gibt, für das gilt:

1) $\left(n(H_i')(\phi,\psi),\ \mathcal{L}'(H_i'(\phi,\psi))\right) = 0$

$$\forall(\phi,\psi) \in G_i, \quad i = 1,2 \tag{10.7}$$

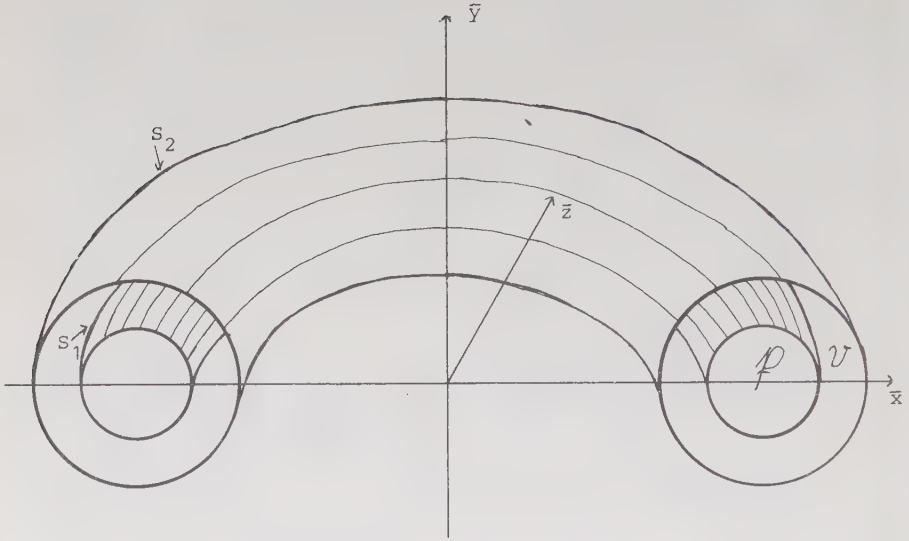
2) $[n(H_i')(\phi,\psi),\ \mathcal{L}'(H_i'(\phi,\psi))] = D_2(H')(\phi,\psi)$

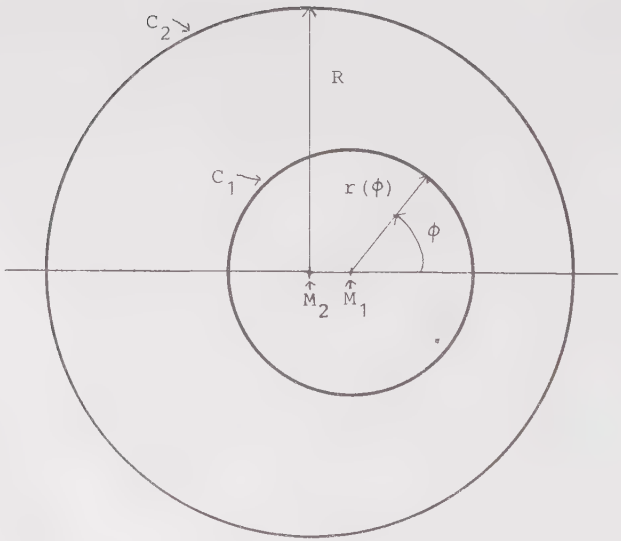
$$\forall(\phi,\psi) \in G_1 \tag{10.8}$$

3) $$\int_0^{2\pi} D_2(H')(\phi,\psi)\cdot\sqrt{r'^2(\phi,\psi) + (r')^2(\phi,\psi)}\,d\phi = A$$

$$\forall\ \psi \in [0,2\pi) \tag{10.9}$$

mit vorgegebenem A.


$\bar{Y}$
S_2
$\bar{z}$
S_1
$\mathcal{P}$
$\mathcal{V}$
$\bar{x}$


C_2
R
C_1
r (ϕ)
ϕ
M_2
M_1

Es bleibt zu zeigen, daß dies wirklich eine Formulierung des Problems nach dem in §2 angegebenen Muster ist. Man sieht sofort, daß das hier angegebene $\mathcal{H}$ die Forderungen a) bis d) aus §2, 2) erfüllt.
H_1 ist eine Parametrisierung des inneren Randes S_1,
H_2 eine Parametrisierung des festen äußeren Randes S_2.
(10.5) bis (10.8) sind Konkretisierungen von (2.16) bis (2.17) und beinhalten gerade die Randbedingungen (9.20), (9.21) und (9.18) im Verein mit (9.22), wobei die Bedingung (2.13) wegen (10.6) erfüllt ist.
(10.9) ist eine Eindeutigkeitsbedingung für das in B(H) gegebene Neumannproblem, die Lösbarkeit bei den homogenen Randbedingungen (10.5) ist sichergestellt. (10.9) bedeutet physikalisch die Vorgabe des durch den äußeren Rand fliessenden Stromes in azimutaler Richtung.

Eine Lösung H' des Problems ist gerade eine Parametrisierung von Rändern S_1 und S_2, zu denen die Gleichungen (9.18) bis (9.22) gleichzeitig lösbar sind, die also eine stationäre Konfiguration bilden.

Sei nun F eine Abbildung von $C^1(G_1)$ nach $\mathbb{R}$ mit den in §6, a) bis e) geforderten Eigenschaften.
Da $\mathcal{Z}'$ ein meridionales Feld ist, ist es ohne weiteres möglich, mit einer Abbildung $F : C^1(G_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ zu arbeiten statt wie nach §6 mit $F : \{C^1(G_1)\}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$.

Ein $\bar{H} \in \mathcal{H}$ heißt dann Lösung im weiteren Sinne, wenn

$$F\{\sqrt{8\pi\bar{p} - c/\bar{r}^2} - (\mathcal{Z}'(\bar{H}), \bar{e}^1_m)\}$$

$$\leq F\{\sqrt{8\pi p - c/r^2} - (\mathcal{Z}'(H), e^1_m)\} \quad \forall H \in \mathcal{H}$$

Diese Formulierung läßt sich - insbesondere durch Ausnutzung der Rotationssymmetrie - noch weiter vereinfachen. Dies wird in den folgenden Paragraphen geschehen. Damit wird das Problem reduziert auf ein Problem im $\mathbb{R}^2$.

Für eine Reihe von zweidimensionalen Problemen mit freiem Rand ergibt sich aus einem Satz von Lewy [9], daß die Lösung - falls sie existiert - analytisch ist. Für dreidimensionale Probleme ist dies noch nicht näher untersucht worden, aber wohl nicht ganz unwahrscheinlich.

§ 11 Die Integralgleichung zum Neumannschen Problem

E.Martensen hat in seiner Arbeit [12] das vektorielle Neumannproblem für Gebiete der gegebenen Geometrie untersucht und dabei den folgenden Satz bewiesen:

Satz 11.1.

Es sei $\mathcal{A}$ ein in $\mathcal{V}$, S_1 und S_2 stetiges und in $\mathcal{V}$ zweimal stetig differenzierbares harmonisches Vektorfeld (d.h. div $\mathcal{A}$ = rot $\mathcal{A}$ = 0), das auf S_1 und S_2 gleichmäßig hölderstetig ist, und für das gilt

$$\int_{S_1} (n, \mathcal{A})\,df = \int_{S_2} (n, \mathcal{A})\,df \tag{11.1}$$

Dann besteht zwischen den auf S_1 und S_2 genommenen Tangentialkomponenten $[n, \mathcal{A}]$ und Normalkomponenten $(n, \mathcal{A})$ von $\mathcal{A}$ die Integralgleichung.
Sei $g := (n, \mathcal{A})$ und $v := [n, \mathcal{A}]$, so gilt:

$$\begin{aligned} v \cdot 2\pi - \int_{S_1} \frac{[n,[v',x-x']]}{r^3}\,df' - \int_{S_2} \frac{[n,[v',x-x']]}{r^3}\,df' \\ = \int_{S_1} \frac{g' \cdot [n,x-x']}{r^3}\,df' - \int_{S_2} \frac{g'[n,x-x']}{r^3}\,df' \end{aligned} \tag{11.2}$$

wobei x, x' jeweils Punkte in $\mathbb{R}^3$ sind, die ungestrichenen Größen im Aufpunkt und die gestrichenen im Integrationspunkt zu nehmen sind und $r := |x - x'|$ ist.

Seien umgekehrt g eine Funktion und v ein Tangentialfeld auf $S_1 \cup S_2$, v und g mögen der Integralgleichung (11.2) und g noch der Bedingung (11.1) genügen. Dann gibt es ein in $\mathcal{V}$ harmonisches Vektorfeld $\mathcal{Z}$, für das gilt:
$(n, \mathcal{Z}) = g$ und $[n, \mathcal{Z}] = v$, und $\mathcal{Z}$ ist durch g und v explizit darstellbar.

Die in der Integralgleichung auftretenden Integrale sind gegebenenfalls als Cauchysche Hauptwerte zu verstehen.

Derartige Äquivalenzsätze sind für viele Probleme der Potentialtheorie bekannt, siehe etwa Martensen [11] und Steffen [19].
Hiermit kann die Problemstellung nun umformuliert werden.

Die Voraussetzungen seien wie in §10. Es sei α dasjenige, nach dem obigen Satz eindeutig bestimmte Vektorfeld auf S_1 und S_2, das der folgenden Integralgleichung genügt

$$2\pi[n,\alpha] = \int_{S_1} \frac{[n,[n',\alpha'],x-x']}{r^3}\,df' + \int_{S_2} \frac{[n,[n',\alpha'],x-x']}{r^3}\,df' \tag{11.3}$$

unter der Nebenbedingung

$$\int_{C_2} (e_m'^2,\alpha')\,ds = A \tag{11.4}$$

wobei C_2 eine meridionale Schnittkurve von S_2 ist.
Gesucht ist nun ein $H' \in \mathcal{H}$, so daß

$$[n,\alpha']|_{S_1} = (D_2(H'))_1 \tag{11.5}$$

bzw. ein $\bar{H} \in \mathcal{H}$ mit

$$F\{\sqrt{8\pi\bar{p} - c/\bar{r}^2} - (\bar{\alpha},\bar{e}_m^1)\} \tag{11.6}$$

$$\leq F\{\sqrt{8\pi p - c/r^2} - (\alpha,e_m^1)\} \quad \forall H \in \mathcal{H}.$$

Satz 11.2

Das durch (11.3) bis (11.5) gegebene Problem ist zu dem durch (10.3) bis (10.9) gegebenen Problem äquivalent.

Beweis:

Sei $\bar{H}$ eine Lösung im engeren Sinne des durch (10.3) bis (10.9) gegebenen Problems und sei $\alpha := \bar{\mathcal{L}}'|_{H_1(G_1)\cup H_2(G_2)}$

Wegen Satz 11.1 genügt dann $\mathcal{A}$ der Integralgleichung (11.3), wegen (10.9) auch der Nebenbedingung (11.4) und wegen (10.8) gilt auch (11.5). $\bar{H}$ ist also auch eine Lösung im engeren Sinne des Problems (11.3) bis (11.5).

Sei nun umgekehrt $\hat{H}$ eine Lösung im engeren Sinne des Problems (11.3) bis (11.5). Wegen Satz 11.1. gibt es dann ein in $B(\hat{H})$ harmonisches Vektorfeld $\mathcal{B}'$, für das gilt:

$$(n, \mathcal{B}') = 0 \qquad \text{auf } \partial B(\hat{H})$$

$$[n, \mathcal{B}'] = D_2(\hat{H}) \quad \text{auf } \hat{H}_1(G_1) \text{ wegen (11.5)}$$

und das wegen (11.4) außerdem die Bedingung (10.9) erfüllt.

$\hat{H}$ ist also auch eine Lösung im engeren Sinne des Problems (10.3) bis (10.9).

Mit denselben Überlegungen ergibt sich die Übereinstimmung von Lösungen im weiteren Sinne und von lokalen Lösungen der beiden Probleme.

Damit ist nun das Differentialgleichungsproblem mit freiem Rand überführt worden in ein äquivalentes Integralgleichungsproblem mit freiem Rand, dessen numerische Behandlung weniger Aufwand verlangt. Dieses Integralgleichungsproblem werde ich nun im folgenden betrachten.

Durch Ausnutzung der Rotationssymmetrie läßt sich das vektorielle Integralgleichungssystem in ein skalares System überführen.

Es seien C_1 und C_2 die Schnittkurven der Flächen S_1 und S_2 mit der Meridianebene $\phi = 0$. $\mathcal{A}$ sei ein Tangentialfeld auf S_1 und S_2, das keine azimutale Komponente hat. Dann gilt

$$\mathcal{A} = a_t \cdot e_m \tag{11.7}$$

wobei e_m der Einheitsvektor in meridionaler Richtung in der Tangentialebene an den Rand ist und a_t eine skalare Funktion. Es ist dann auch

$$[n, \mathcal{A}] = a_t \cdot e_a \ . \tag{11.8}$$

Es seien nun

$$\{(x_i(\phi), y_i(\phi), 0) \ 0 \leq \phi < 2\pi\} \qquad i = 1,2$$

die Darstellungen von $\mathcal{C}_i$ in Zylinderkoordinaten, und

$$\dot{x}_i := \frac{dx_i}{d\phi} , \quad \dot{y}_i := \frac{dy_i}{d\phi} .$$

Weiter sei

$$w_{ti}(\phi) := a_{ti}(\phi) \cdot \{(\dot{x}_i(\phi)^2 + (\dot{y}_i(\phi)^2\}^{1/2}, \qquad (11.9)$$

$$i = 1,2 .$$

Ist $\mathcal{O}\!\!\mathcal{T}$ ein Tangentialfeld, das die Integralgleichung (11.3) mit der Nebenbedingung (11.4) löst, so genügen die w_{ti} dem Integralsystem

$$2\pi w_{ti}(\phi) = \sum_{j=1}^{2} \int_0^{2\pi} K_{ij}(\phi,\phi') \cdot w_{tj}(\phi')d\phi' \qquad (11.10)$$

$$(i = 1,2)$$

mit der Nebenbedingung

$$\int_0^{2\pi} w_{t_2}(\phi)d\phi = A \qquad (11.11)$$

und umgekehrt (Martensen [12]).

Der Kern K_{ij} hat dabei die Form

$$K_{ij}(\phi,\phi') =$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{[x_i(\phi)\cos(\psi-\psi')-x_j(\phi')]\cdot\dot{y}_j(\phi)-[y_i(\phi)-y_j(\phi')]\cos(\psi-\psi')\cdot\dot{x}_i(\phi)}{\{x_i^2(\phi)-2x_i(\phi)x_j(\phi')\cos(\psi-\psi')+x_j^2(\phi')+[y_i(\phi)-y_j(\phi')]^2\}^{3/2}}$$

$$\cdot x_j(\phi')d\psi' \qquad (11.12)$$

K_{ij} hängt nicht mehr von ψ ab und läßt sich, wie im §12 angegeben, zurückführen auf elliptische Integrale.

Damit läßt sich nun das durch (11.3) bis (11.6) gegebene Problem noch einfacher und für die numerische Behandlung günstiger formulieren.

Es seien $M_1, M_2, R, p_o, \kappa, A$ und c erklärt wie in §10.

Weiter sei

1) $G_1 := G_2 := [0,2\pi) \subset \mathbb{R}$.

2) $\mathcal{H} = \{H = (H_1,H_2) \mid H_i : G_i \longrightarrow \mathbb{R}^2$ mit den Eigenschaften a,b und c$\}$

a) $H_1(\phi) = (r_H(\phi),\phi) \qquad \forall\, \phi \in G_1$ (11.13)

wobei r_H eine Funktion aus $C^2_{2\pi}$ ist.

b) $H_2(\phi) = (R,\phi) \qquad \forall \phi \in G_2$ (11.14)

c) $H_1(G_1)$ ist ganz im Innern von $H_2(G_2)$ enthalten.

3) Es sei $V_o := 4\pi^2 \cdot R^2 \cdot M_2$, (11.15)

$$V(H) := 2\pi \cdot \{\frac{1}{2} \int_o^{2\pi} (M_1 \cdot r_H^2(\phi)\, d\phi + \frac{1}{3} \int_o^{2\pi} r_H^3(\phi) \cos\phi\, d\phi\} \quad (11.16)$$

und $p = p_o \cdot (V_o/V(H))^K$. (11.17)

$D_2 : \mathcal{H} \longrightarrow C^1(G_1)$ sei erklärt durch

$$D_2(H)(\phi) = \sqrt{8\pi p - c/(M_1 + r_H(\phi)\cos\phi)^2} \quad (11.18)$$

$$\forall\, \phi \in G_1 .$$

Gesucht ist ein $H' \in \mathcal{H}$, so daß für die Lösungen $w_{ti}^{H'}$ der Integralgleichung (11.10) mit der Nebenbedingung (11.11) auf den Kurven $H_1'(G_1)$, $H_2'(G_2)$ gilt

$$w_{t1}^{H'}(\phi) = D_2(H')(\phi) \cdot \sqrt{r_{H'}^2(\phi) + \dot{r}_{H'}^2(\phi)} \qquad \forall \phi \in G_1 . \quad (11.19)$$

Da V_o das Volumen des von $H_2(G_2)$ und $V(H)$ das des von $H_1(G_1)$ erzeugten Rotationskörpers ist, ist diese Formulierung der Formulierung (11.3) bis (11.5) gleichwertig.
Sei nun F eine Abbildung $C^1(G_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit den in §6 geforderten Eigenschaften,
d.h. F stetig ; $F(g) \geqslant 0 \qquad \forall g \in C^1(G_1)$,

$F(g) = 0 \iff g = 0$; $F(g) = F(-g)$

und $f \geqslant g \geqslant 0 \Rightarrow F(f) \geqslant F(g)$.

Ein $\bar{H} \in \mathcal{H}$ heißt dann Lösung des Problems im weiteren Sinne, wenn

$$F(\bar{w}_{t1}(\phi) - D_2(\bar{H})(\phi)) \leqslant F(w_{t1} - D_2(H)(\phi)) \quad \forall H \in \mathcal{H}$$

§ 12 Die numerische Behandlung der Integralgleichung

Die vorliegende Integralgleichung (11.10) wurde von E.Martensen [12], der auch das von mir angewandte Verfahren zur numerischen Lösung der Gleichung entwickelte, genauer untersucht. Aus dieser Arbeit will ich nun diejenigen Ergebnisse angeben, die zum Verständnis des weiteren notwendig sind.

Dazu führe ich zunächst einige Bezeichnungen ein.

Es sei

$$E(k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-k^2 \sin\psi)^{1/2}\, d\psi \qquad o\leqslant k<1 \tag{12.1}$$

das vollständige elliptische Normalintegral zweiter Gattung

und $$G(k) = k^2 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\psi\,(1-k^2\sin^2\psi)^{-1/2}\, d\psi \qquad o\leqslant k<1. \tag{12.2}$$

Es gilt

$$E(k) = E'(k) + E''(k)\,\ln\,[4(1-k^2)^{-1/2}] \tag{12.3}$$

$$G(k) = G'(k) + G''(k)\,\ln\,[4(1-k^2)^{-1/2}] \tag{12.4}$$

mit bei k = 1 regulär analytischen Funktionen E',E'',G',G'', und es gelten für $o<k\leqslant 1$ die Entwicklungen

$$E'(k) = \sum_{i=o}^{\infty} a_i (1-k^2)^i \tag{12.5}$$

$$E''(k) = \sum_{i=o}^{\infty} b_i (1-k^2)^i \tag{12.6}$$

$$G'(k) = \sum_{i=o}^{\infty} c_i (1-k^2)^i \tag{12.7}$$

$$G''(k) = \sum_{i=o}^{\infty} d_i (1-k^2)^i \tag{12.8}$$

deren Koeffizienten durch die folgenden Rekursionsformeln leicht ermittelt werden können.

$$a_i = \frac{(2i-1)(2i-3)}{4i(i-1)}\, a_{i-1} - \frac{4i^2-6i+3}{8i^2(i-1)}\, b_{i-1}$$

$$i \geqslant 2\ ;\quad a_o = 1;\quad a_1 = -0{,}25 \qquad (12.9)$$

$$b_i = \frac{(2i-1)(2i-3)}{4i(i-1)}\, b_i,\quad i \geqslant 2\ ;\ b_o = 0;\ b_1 = 0{,}5 \qquad (12.10)$$

$$c_i = \frac{(2i-1)(2i-3)}{4i^2}\, c_{i-1} - \frac{4i-3}{4i^2}\, d_{i-1}\ ,$$

$$i \geqslant 1;\quad c_o = -1 \qquad (12.11)$$

$$d_i = \frac{(2i-1)(2i-3)}{4i^2}\, d_{i-1}\ ,\quad i \geqslant 1\ ;\quad d_o = 1\ . \qquad (12.12)$$

Das Rekursionsverfahren ist stabil, da für $i \geqslant 1$ a_i und d_i negativ und b_i und c_i positiv sind.

Es ist $E'(1) = 1,\quad E''(1) = 0$ (12.13)

$G'(1) = -1,\quad G''(1) = 1\ .$ (12.14)

Sei nun im folgenden f eine Funktion auf $\bigcup_{i,j=1,2} G_i \times G_j$,

dann sei $f_{ij} := f_{|G_i \times G_j} \qquad (i=1,2)$,

und sei f eine Funktion auf $G_1 \cup G_2$, so sei

$f_i = f_{|G_i} \qquad i = 1,2.$

Es seien nun weiter

$$k_{ij}(\phi,\phi') := 2 \cdot \left\{ \frac{x_i(\phi)\, x_j(\phi')}{[x_i(\phi)+x_j(\phi')]^2 + [y_i(\phi)-y_j(\phi')]^2} \right\}^{1/2} \qquad (12.15)$$

$$L_{ij}(\phi,\phi') := 2 \cdot \frac{[x_i(\phi)-x_j(\phi')]\cdot \dot{y}_i(\phi) - [v_i(\phi)-v_j(\phi')]\cdot \dot{x}_i(\phi)}{[x_i(\phi)-x_j(\phi')]^2 + [y_i(\phi)-v_j(\phi')]^2} \qquad (12.16)$$

$$Q_{ij}(\phi,\phi') := \frac{[y_i(\phi)-y_j(\phi')]\,\dot{x}_i(\phi)-x_i(\phi)\cdot\dot{y}_i(\phi)}{x_i(\phi)\cdot x_j(\phi')} \tag{12.17}$$

$$E_{ij}(\phi,\phi') := E(k_{ij}(\phi,\phi')) \tag{12.18}$$

$$G_{ij}(\phi,\phi') := G(k_{ij}(\phi,\phi')\,. \tag{12.19}$$

Dann gilt

$$K_{ij}(\phi,\phi') = k_{ij}(\phi,\phi')$$

$$\{E_{ij}(\phi,\phi')\cdot L_{ij}(\phi,\phi')+G_{ij}(\phi,\phi')\cdot Q_{ij}(\phi,\phi')\}\sqrt{\frac{x_j(\phi')}{x_i(\phi)}} \tag{12.20}$$

$$(i,j = 1,2)\,.$$

Für $i = j$ und $\phi = \phi'$ hat $K_{ij}(\phi,\phi')$ eine Singularität. Da E_{ij}, k_{ij} und Q_{ij} überall stetig sind und da

$$\lim_{\phi\longrightarrow\phi'} L_{ii}(\phi,\phi') = \frac{\dot{x}_i(\phi)\,\ddot{y}_i(\phi) - \dot{y}_i(\phi)\,\ddot{x}_i(\phi)}{\dot{x}_i(\phi)^2 + \dot{y}_i(\phi)^2} \qquad i = 1,2 \tag{12.21}$$

gilt, wird der Charakter der Singularität von K_{ii} bestimmt durch die Singularität von G_{ii}.

Sei $H_{ij}(\phi,\phi') := \ln\{4\cdot[1-k_{ij}^2(\phi,\phi')]^{-1/2}\}$, (12.22)

so wird die Singularität von G_{ii} gegeben durch den Ausdruck $H_{ii}(\phi,\phi') - 1$, wie aus der Zerlegung (12.4) folgt.

Weiter gilt

$$\lim_{\phi'\longrightarrow\phi}\{H_{ii}(\phi,\phi') + \frac{1}{2}\ln\,(4\,\sin^2\frac{\phi'-\phi}{2})\}$$

$$= \ln\{8\cdot x_i(\phi)\cdot[\dot{x}_i^2(\phi) + \dot{y}_i^2(\phi)]^{-1/2}\}\,. \tag{12.23}$$

Ich setze nun

$$E'_{ij}(\phi,\phi') := E'(k_{ij}(\phi,\phi'))$$

und definiere F''_{ij}, G'_{ij}, G''_{ij} analog. (12.24)

Es sei

$$\bar{E}_{ij}(\phi,\phi') := E'_{ij}(\phi,\phi') + E''_{ij}(\phi,\phi') \cdot \{H_{ij}(\phi,\phi') + \frac{1}{2} \ln (4 \sin^2 \frac{\phi'-\phi}{2})\} \tag{12.25}$$

$$\bar{G}_{ij}(\phi,\phi') := G'_{ij}(\phi,\phi') + G''_{ij}(\phi,\phi') \cdot \{H_{ij}(\phi,\phi') + \frac{1}{2} \ln (4 \sin^2 \frac{\phi'-\phi}{2})\} \tag{12.26}$$

$$K'_{ii}(\phi,\phi') := k_{ii}(\phi,\phi') \cdot \{\bar{E}_{ii}(\phi,\phi') \cdot L_{ii}(\phi,\phi') + \bar{G}_{ii}(\phi,\phi') \cdot Q_{ii}(\phi,\phi')\} \sqrt{\frac{x_i(\phi')'}{x_i(\phi)}} \tag{12.27}$$

$$K''_{ii}(\phi,\phi') := -\frac{1}{2} k_{ii}(\phi,\phi') \cdot \{E''_{ii}(\phi,\phi') \cdot L_{ii}(\phi,\phi') + G''_{ii}(\phi,\phi') \cdot Q_{ii}(\phi,\phi')\} \sqrt{\frac{x_i(\phi')'}{x_i(\phi)}} . \tag{12.28}$$

Dann gilt

$$K_{ii}(\phi,\phi') = K'_{ii}(\phi,\phi') + K''_{ii}(\phi,\phi') \cdot \ln(4 \sin^2 \frac{\phi'-\phi}{2}) \quad i = 1,2 \tag{12.29}$$

Wegen (12.5) bis (12.12), (12.15) und (12.23) ergibt sich damit

$$\lim_{\phi' \to \phi} \bar{E}_{ii}(\phi,\phi') = 1 \qquad i = 1,2 \tag{12.30}$$

$$\lim_{\phi' \to \phi} \bar{G}_{ii}(\phi,\phi') = -1 + \ln \{8 \cdot x_i(\phi) \cdot [\dot{x}_i^2(\phi) + \dot{y}_i^2(\phi)]^{-1/2}\}, \tag{12.31}$$

so daß $K'_{ii}(\phi,\phi')$ und $K''_{ii}(\phi,\phi')$ für alle Werte von ϕ und ϕ' stetig sind.

Es gilt nun weiter

$$\int_0^{2\pi} K_{ij}(\phi,\phi')\, d\phi = 2\pi(i-j+1) \qquad (i,j = 1,2) \tag{12.32}$$

Damit läßt sich die Integralgleichung (11.9) umformen zu

$$4\pi\delta_i^2\,(w_2(\phi) - w_1(\phi)) = -\int_0^{2\pi} [K_{i1}(\phi',\phi)w_1(\phi) - K_{i1}(\phi,\phi')w_1(\phi')]d\phi' + \int_0^{2\pi} [K_{i2}(\phi',\phi)w_2(\phi) - K_{i2}(\phi,\phi')w_2(\phi')]d\phi' \qquad (12.33)$$

$$(i = 1,2)\ .$$

Die numerische Behandlung dieser Integralgleichung geschieht zweckmäßig mit einer Interpolationsquadratur. Die stetigen Anteile der Kerne K_{ij} können dabei am besten nach der Rechteckregel behandelt werden.
Für die Integration der Singularität kann man auf das folgende spezielle Verfahren zurückgreifen:
Es sei N vorgegeben

$$\phi_\nu = \pi\nu/N\ , \qquad \nu = 0,1,\ldots,2N-1\ , \qquad (12.34)$$

f eine Funktion aus $C^2_{2\pi}$; $f_\nu := f(\phi_\nu)$

$$R_\nu := -\frac{1}{N}\{\frac{(-1)^\nu}{2N} + \sum_{\mu=1}^{N-1} \frac{\cos(\mu\cdot f_\nu)}{\mu} \qquad \nu = 0,\ldots,2N-1 \qquad (12.35)$$

und $R_{-\nu} := R_{2N-\nu}$.

Dann ist

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\psi)\,\ln(4\sin^2\frac{\psi-\phi_\mu}{2})\,d\psi \approx \sum_{\nu=0}^{2N-1} R_{\nu-\mu}\,f_\nu \qquad (12.36)$$

$$\mu = 0,\ldots,2N-1\ .$$

Die Formel (12.36) ist exakt, wenn f ein trigonometrisches Polynom der Ordnung kleiner oder gleich N ist.
Diese Quadraturformeln erreichen bei analytischen periodischen Funktionen eine außerordentlich hohe Genauigkeit.
Das Integral

$$\int_0^{2\pi} [K_{ii}(\phi',\phi)w_i(\phi) - K_{ii}(\phi,\phi')w_i(\phi')]d\phi'$$

kann also behandelt werden, indem K_{ii} nach (12.29) zerlegt wird, auf den Teil mit K'_{ii} die Rechteckregel und auf den Rest die Formel (12.36) angewandt wird.

Dann ergibt sich für die Werte w_i^ν von w_i an den Stützstellen ϕ_ν das folgende Gleichungssystem:

$$\sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq\mu}}^{2N-1} \{(\frac{1}{2N} K'_{11}(\phi_\nu,\phi_\mu)+R_{\mu-\nu} K''_{11}(\phi_\nu,\phi_\mu)) w_1^\mu - (\frac{1}{2N} K'_{11}(\phi_\mu,\phi_\nu)+R_{\nu-\mu} K''_{11}(\phi_\mu,\phi_\nu)) w_1^\nu \}$$

$$= \sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq\mu}}^{2N-1} \frac{1}{2N} (K_{12}(\phi_\nu,\phi_\mu)\cdot w_2^\mu - K_{21}(\phi_\mu,\phi_\nu)\cdot w_2^\nu) \qquad (12.37)$$

$$\mu = 0,\ldots,2N-1$$

$$2\cdot(w_2^\mu - w_1^\mu) + \frac{1}{2N} \sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq\mu}}^{2N-1} (K_{21}(\phi_\nu,\phi_\mu) w_2^\mu - K_{12}(\phi_\mu,\phi_\nu) w_2^\nu)$$

$$= \sum_{\substack{\nu=0\\ \nu\neq\mu}}^{2N-1} \{(\frac{1}{2N} K'_{22}(\phi_\nu,\phi_\mu)+R_{\mu-\nu} K''_{22}(\phi_\nu,\phi_\mu)) w_2^\mu - (\frac{1}{2N} K'_{22}(\phi_\mu,\phi_\nu)+R_{\nu-\mu} K''_{22}(\phi_\mu,\phi_\nu)) w_2^\nu \}$$

$$\mu = 0,\ldots,2N-1\,. \qquad (12.38)$$

Die Gleichungen (12.37) sind linear abhängig, sie ergeben addiert die Identität $0 = 0$. Man kann daher eine beliebige, etwa die für $\mu = 0$, unterdrücken und durch die Normierungsgleichung

$$\frac{1}{2N} \sum_{\mu=0}^{2N-1} w_1^\mu = \frac{1}{2\pi}\cdot A \qquad (12.29)$$

ersetzen.

§ 13 Zur Existenz von Lösungen des Problems im weiteren Sinne.

Zur Untersuchung der Existenz von Lösungen benutze ich das Kriterium aus §6: Eine Lösung im weiteren Sinne existiert mindestens dann, wenn gilt:

1) Die Abbildung $H \longrightarrow F(D_3(H))$ ist stetig und
2) die Menge $\mathcal{H}_K : \{H \in \mathcal{H}: F(D_3(H)) \leqslant K\}$ ist für ein geeignetes K nichtleerund kompakt.

Nun ist die Wahl einer Abbildung $F : C^1(G_1) \longrightarrow \mathbb{R}$ nötig. Ich wähle

$$F(g) := \{\int_0^{2\pi} g^2 d\phi\}^{1/2} \qquad \forall g \in C^1(G) \ . \tag{13.3}$$

F erfüllt die in §6 gestellten Bedingungen.
Weiter benötige ich eine Topologie auf $\mathcal{H}$. Da wegen (10.3) $\mathcal{H}$ unmittelbar als Teilmenge von $C^2_{2\pi}$ aufgefaßt werden kann, liegt es nahe, diese Topologie durch eine Norm auf $C^2_{2\pi}$ zu definieren. Ich wähle dazu die Norm

$$\|f\|^{(2)} := \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty + \|f''\|_\infty \ , \quad f \in C^2_{2\pi} \ . \tag{13.1}$$

Sei r die H definierende Funktion und r' die H' definierende, dann setze ich für $H,H' \in \mathcal{H}$

$$d_2(H,H') := \|r - r'\|^{(2)} . \tag{13.2}$$

Diese Topologie ist erheblich feiner als die in §4 durch die Metrik d definierte; dies ist nötig, um die Stetigkeit von $F \circ D_3$ zeigen zu können.
Dazu beweise ich zunächst zwei Hilfssätze:

Hilfssatz 13.1

Zu jedem $H \in \mathcal{H}$ gibt es Zahlen $\delta > 0$ und $C < \infty$, so daß für alle H' aus $\mathcal{H}$ mit $d_2(H,H') < \delta$ gilt

$$\|D_2(H) - D_2(H')\|_\infty < C \cdot \|r - r'\|_\infty$$

Beweis:

Es ist $D_2(H)(\phi) = \sqrt{8\pi p - c/(M_1 + r(\phi)\cos\phi)^2}$.

Nun ist $\|r\|_\infty < M_1$, in den Anwendungsfällen ist $M_1 + r\cos\phi > 1/2$ und c ist so gewählt, daß die Wurzel nach unten beschränkt ist durch eine positive Zahl. Weiter gilt nach (11.17) $p = \text{const}/(V(H))^K$, und wegen (11.16) gibt es ein $C_1 < +\infty$, so daß für alle $H' \in \mathcal{H}$ gilt

$$|V(H) - V(H')| \leq C_1 \|r - r'\|_\infty \quad .$$

Es sei nun $\delta_o \leq V(H)/2 \cdot C_1$

$\Longrightarrow \forall H' \in \mathcal{H}$ mit $\|r - r'\|_\infty \leq \delta_o$ gilt: $V(H') \geq \frac{1}{2} V(H) \geq \frac{1}{3} V(H')$

$\Longrightarrow$ Es gibt ein $C_2 < +\infty$, so daß für alle $H' \in \mathcal{H}$ mit

$$\|r - r'\| \leq \delta_o \text{ gilt: } |p - p'| \leq C_2 \cdot \|r - r'\|_\infty \; .$$

Es sei nun δ so gewählt, daß es ein $\varepsilon_o > o$ gibt, so daß

$$p_{H'} \cdot 8\pi - c/(M_1 + r_{H'}(\phi)\cos\phi)^2 \geq \varepsilon_o^2$$

$$\forall \phi \in G_1, \; H' \text{ mit } \|r - r'\|_\infty < \delta \quad ,$$

so folgt die Behauptung .

<u>Hilfssatz 13.2</u>

Es sei u eine Lösung der Integralgleichung (11.10) zu $H \in \mathcal{H}$ unter der Nebenbedingung

$$\|u\|_2 := \{ \sum_{i=1}^{2} \int_o^{2\pi} u_i^2(\phi) d\phi \}^{1/2} = 1 \quad .$$

Dann ist u in der L_2-Norm stetig von H abhängig, d.h. zu jedem $H \in \mathcal{H}$ und jedem $\varepsilon > o$ $\exists$ $\delta > o$, so daß für alle $H' \in \mathcal{H}$ mit $d_2(H,H') < \delta$ gilt

$$\|u - u'\|_2 < \varepsilon \; ,$$

wobei u' die Lösung von (11.10) zu H' ist.

Beweis: Es sei $H \in \mathcal{H}$ fest, $\delta < \frac{1}{4} \min_\phi r(\phi)$ so gewählt, daß für alle $\bar{H} \in \mathcal{H}$ mit $d_2(H,\bar{H}) < \delta$ gilt:

$\min_{\phi \in G_1} \min_{\phi' \in G_2} |(\bar{r}(\phi),\phi) - (R,\phi')| > \delta$, wobei $|.|$ den euklidischen Abstand bezeichnen soll.

Sei K der zu H gehörige und $\bar{K}$ der zu $\bar{H}$ gehörige Kern. Dann folgt aus den Gleichungen (12.3) bis (12.12), (12.15) bis (12.28)

$$\|K_{ij} - \bar{K}_{ij}\|_\infty \leq L_1 \cdot d_2(H,\bar{H}) \quad \text{mit } L_1 < \infty ,$$

$$i \neq j,\ i,j = 1,2 \qquad (13.4)$$

$$\|K'_{ii} - \bar{K}'_{ii}\|_\infty \leq L_2 \cdot d_2(H,\bar{H}) \quad \text{mit } L_2 < \infty,$$

$$i = 1,2 \qquad (13.5)$$

$$\|K''_{ii} - \bar{K}''_{ii}\|_\infty \leq L_3 \cdot d_2(H,\bar{H}) \quad \text{mit } L_3 < \infty,$$

$$i = 1,2\ . \qquad (13.6)$$

Hiervon möchte ich nur die erste Abschätzung beweisen. Wegen der Darstellung (12.20) ist $K_{ij}(\phi,\phi')$ für festes (ϕ,ϕ') eine analytische Funktion in den Variablen x_i, y_i, y_j $x_j, \dot{x}_i, \dot{y}_i$, falls $(x_i,y_i) \neq (x_j,y_j)$ und $x_i \neq 0$, $x_j \neq 0$, und diese hängen wiederum wegen

$$x_1(\phi) = M_1 + r(\phi)\cos\phi,\ y_1(\phi) = r(\phi)\sin\phi$$

$$x_2(\phi) = M_2 + R \cdot \cos\phi,\ y_2(\phi) = R \cdot \sin\phi$$

analytisch von $r(\phi)$ und $\dot{r}(\phi)$ ab.
Durch die Wahl von δ ist aber gerade der Fall $(x_i,y_i) = (x_j,y_j)$ ausgeschlossen, und da $x_i \geq M_2 - R > 0$, $i = 1,2$ gilt, folgt

$$|K_{ij}(\phi,\phi') - \bar{K}_{ij}(\phi,\phi')| \leq \bar{L}(\phi,\phi') \cdot d_2(H,\bar{H}),$$

wobei $\bar{L}$ stetig von (ϕ,ϕ') abhängt.
Ich setze nun $L_1 = \max\limits_{(\phi,\phi')} \bar{L}(\phi,\phi')$ und erhalte (13.4).

Mit (12.29) folgt nun aus (13.5), (13.6)

$$|K_{ii}(\phi,\phi') - \bar{K}_{ii}(\phi,\phi')| \leq d_2(H,\bar{H}) \cdot (L_2 + L_3 |\ln(4 \sin^2 \tfrac{\phi'-\phi}{2})|),$$

u ist als Lösung der Integralgleichung (11.10) nach Martensen [12] hölderstetig, daher existiert das Integral

$\int_0^{2\pi} u_j(\phi') \cdot |\ln(4 \sin^2 \frac{\phi'-\phi}{2})| \, d\phi'$ für $j = 1,2$ und ist stetig

von ϕ abhängig. Es gibt also ein $C_1 < \infty$, $C_1 = C_1(L_1, L_2, L_3, u)$, mit

$$\left| \sum_{j=1}^{2} \int_0^{2\pi} (K_{ij}(\phi,\phi') - \bar{K}_{ij}(\phi,\phi')) \cdot u_j(\phi') d\phi' \right| \leq C_1 \cdot d_2(H,\bar{H}) \qquad (13.7)$$

Nun gilt:

$$u_i(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1,2} \int_0^{2\pi} K_{ij}(\phi,\phi') \cdot u_j(\phi') d\phi', \quad i = 1,2 \qquad (13.8)$$

$$\bar{u}_i(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1,2} \int_0^{2\pi} \bar{K}_{ij}(\phi,\phi') \cdot \bar{u}_j(\phi') d\phi', \quad i = 1,2 \qquad (13.9)$$

und damit

$$u_i(\phi) - \bar{u}_i(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1,2} \int_0^{2\pi} (K_{ij} - \bar{K}_{ij}) u_j d\phi'$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1,2} \int_0^{2\pi} \bar{K}_{ij}(u_j - \bar{u}_j) d\phi' \quad (i = 1,2) \qquad (13.10)$$

Es sei nun $u(\phi) = \alpha \cdot \bar{u}(\phi) + \beta \cdot v(\phi)$ mit $\|v\|_2 = 1$, $(\bar{u}, v) = 0$. (13.11)

Addiere ich nun auf beiden Seiten von (13.10)
$(1-\alpha) \cdot \bar{u}_i(\phi)$, so erhalte ich mit (13.9)

$$\beta \cdot v_i(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{2} \int_0^{2\pi} (K_{ij} - \bar{K}_{ij}) \cdot u_j \, d\phi'$$

$$+ \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{2} \beta \cdot \int_0^{2\pi} \bar{K}_{ij} \cdot v_j \, d\phi' \quad , \quad i = 1,2 \, . \qquad (13.12)$$

Da aber (11.10) die Integralgleichung zum homogenen Neumannschen Problem ist, ist bekanntlich (siehe etwa Martensen [12]) 1 ein einfacher Eigenwert der Integralgleichung, und da der Integraloperator auch kompakt ist, gibt es ein $\varepsilon_o > o$, so daß

$$\| v - \frac{1}{2\pi} \sum_{j=1}^{2} \int_{o}^{2\pi} \bar{K}_{ij} \cdot v \, d\phi' \|_2 \geq \varepsilon_o \quad . \tag{13.13}$$

Damit erhalte ich aus (13.12) und (13.7):

$$\beta \cdot \varepsilon_o \leq \| \frac{1}{2\pi} \cdot \sum_{j=1}^{2} \int_{o}^{2\pi} (K_{ij} - \bar{K}_{ij}) \cdot \bar{u}_j \, d\phi' \|_2$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \{ 2 \cdot \int_{o}^{2\pi} C_1^2 \cdot d_2^2(H,\bar{H}) \, d\phi \}^{1/2} \tag{13.14}$$

$$\Longrightarrow \beta \cdot \varepsilon_o \leq \sqrt{2/\pi} \cdot C_1 \cdot d_2(H,\bar{H}) \quad . \tag{13.15}$$

Andererseits folgt aus (13.11) $\alpha^2 + \beta^2 = 1$ sowie

$\| u - \bar{u} \|_2 = \sqrt{(1-\alpha)^2 + \beta^2}$.

Sei nun δ so gewählt, daß

$$C_1/\varepsilon_o \cdot \sqrt{2} \cdot \delta \leq 1/10 \, ,$$

so folgt:

Es existiert ein $C < +\infty$, so daß für alle $\bar{H} \in \mathcal{H}$ mit $d_2(H,\bar{H}) < \delta$ gilt

$$\| u - \bar{u} \|_2 < C \cdot d_2(H,\bar{H}) .$$

u ist also lokal lipschitzstetig von H abhängig, also insbesondere auch stetig, was zu beweisen war.

Damit kann ich nun den folgenden Satz beweisen.

Satz 13.3

Sei nun u die Lösung der Integralgleichung (11.10) unter der Nebenbedingung

$$\int_{o}^{2\pi} u_1(\phi) d\phi = A \tag{13.16}$$

und es sei

$$F(H) := \{ \int_0^{2\pi} (D_2(H) - u_1)^2 \, d\phi \}^{1/2} . \qquad (13.17)$$

Dann ist F stetig von H abhängig.
Bemerkung: Wesentlich an diesem Satz ist die Änderung der Nebenbedingung gegenüber dem Hilfssatz 13.2 .

Beweis: Seien H,H' gegeben mit $d_2(H,H') < \delta$ (δ wie im Beweis von Hilfssatz 13.2). Nach Hilfssatz 13.1 ist $\|D_2(H)\|_\infty$ stetig von H abhängig, nach Hilfssatz 13.2 auch

$$\hat{u} := u / \|u\|_2 .$$

Es ist nun $u = a \cdot \hat{u}$ mit (13.18)

$$a := A \Big/ \int_0^{2\pi} \hat{u}_1(\phi) d\phi$$

und entsprechend $\hat{u}' = u' / \|u'\|_2$.

Sei nun $$\|g\|_1 = \int_0^{2\pi} |g_1| d\phi + \int_0^{2\pi} |g_2| d\phi \quad , \qquad (13.19)$$

so folgt

$$\|g\|_1 \leq \|g\|_2 \cdot \sqrt{4\pi} \qquad \forall g \in C^0(G_1 \cup G_2) . \qquad (13.20)$$

Wegen der speziellen Symmetrieeigenschaften der Konfiguration haben die Eigenlösungen der Integralgleichung keinen Vorzeichenwechsel; wegen $A > 0$ folgt also

$$\int_0^{2\pi} \hat{u}_i d = \int_0^{2\pi} |\hat{u}_i| d\phi \qquad i = 1,2 \quad . \qquad (13.21)$$

Dieses Ergebnis folgt unmittelbar aus der Ergiebigkeitsfreiheit und der Stetigkeit des Magnetfeldes $\mathcal{H}'$ (zur Definition von $\mathcal{H}'$ siehe §9).

Ebenso folgt

$$\int_0^{2\pi} \hat{u}_1 d\phi = \int_0^{2\pi} \hat{u}_2 d\phi \qquad (13.22)$$

und damit $\|u\|_1 = \|u'\|_1 = 2A$. (13.23)

Nun gilt mit (13.20) und Hilfssatz 13.2 :

$$\|\hat{u} - \hat{u}'\|_1 \leq \sqrt{4\pi}\, \|\hat{u} - \hat{u}'\|_2 \leq \sqrt{4\pi} \cdot \bar{C} \cdot d_2(H,H'), \qquad (13.24)$$

damit folgt wegen (13.23) und (13.18) :
Es gibt ein $\delta > 0$ und ein $C < \infty$, so daß für alle H' mit $d_2(H,H') \leq \delta$ gilt: $|a - a'| \leq C \cdot d_2(H,H')$. (13.25)

Damit ergibt sich dann

$$\|u - u'\|_2 = \|a\hat{u} - a'\hat{u}'\| \leq (a \cdot \bar{C} + C) \cdot d_2(H,H')$$

für alle H' mit $d_2(H,H') \leq \delta$;
also ist auch u_1 stetig von H abhängig, und die Behauptung folgt aus der Dreiecksungleichung.

Da also sowohl u_1 als auch $D_2(H)$ in der L_2-Norm auf $[0,2\pi)$ stetig von H abhängen, gilt dies auch für ihre Differenz. Also ist die Abbildung

$$Fo\ D_3 : \mathcal{H} \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{stetig.}$$

Damit ist die eine der in §6 genannten hinreichenden Bedingungen für die Existenz einer Lösung im weiteren Sinne erfüllt. Die zweite Bedingung ist die Existenz einer Zahl $K > 0$, so daß die Menge

$$\mathcal{H}_K := \{H \in \mathcal{H} \mid Fo\ D_3(H) \leq K\}$$

nichtleer und kompakt ist.

Es ist mir nicht gelungen, nachzuweisen, daß diese Bedingung erfüllt ist, ich will aber im folgenden versuchen, die Vermutung, daß sie erfüllt ist, durch physikalische Überlegungen plausibel zu machen.

Die Funktion $D_2(H)$ hat die Gestalt:

$$D_2(H)(\phi) = \sqrt{8\pi \cdot p - c/x^2(\phi)}\,, \quad (\phi \in G_1) \qquad (13.26)$$

wobei $x(\phi)$ der Abstand des Punktes $H(\phi)$ von der Drehachse ist. Für alle realistischen Konfigurationen gilt nun

$c << 8\pi \cdot p$ und $x(\phi) \approx 1 \quad \forall \phi$,

so daß $D_2(H)$ annähernd konstant ist. Der Funktionswert ist also hauptsächlich von $V(H)$ abhängig.

Der Funktionswert von u_1 an der Stelle ϕ ist nun wiederum - wie man aus der experimentellen Erfahrung und aus den angegebenen Beziehungen weiß - im wesentlichen abhängig von drei Größen:

1) der Länge L der Kurve C_1 wegen $\int_{C_1} u_1 \, ds = A$

2) dem Flächeninhalt der von dem durch $H(\phi)$ bestimmten Kreis ausgehenden Orthogonaltrajektorien zu dem Magnetfeld wegen der Ergiebigkeitsfreiheit des Feldes. Ist $d(\phi)$ der Abstand des Punktes $H(\phi)$ zum äußeren Rand, so ist dieser Flächeninhalt in erster Näherung gegeben durch

$$I(\phi) \approx 2\Pi \cdot d(\phi) \cdot (\tfrac{1}{2}(R \cdot \cos\phi + M_2 + x(\phi)) \qquad (13.27)$$

(R, $r(\phi)$, M_1, M_2 wie in §10) .

Es gilt nun näherungsweise

$$u_1(\phi) \cdot I(\phi) \approx \text{const} \qquad (13.28)$$

3) der Krümmung $K(\phi)$ von C_1 an der Stelle $H(\phi)$, und zwar so, daß $u_1(\phi)$ um so stärker ist, je größer die Krümmung ist.

Dabei wirken $I(\phi)$ und $K(\phi)$ zumindest überwiegend in dieselbe Richtung, ein relativ kleiner Abstand ist meist mit einer relativ großen Krümmung verbunden und umgekehrt.

Es sei nun $H_o \in \mathcal{H}$ so, daß C_1^o einen Kreis um einen Mittelpunkt M_o mit einem Radius r_o bildet, wobei r_o und M_o so gewählt seien, daß

$$1) \quad \int_0^{2\pi} D_2(H_o) \; r_o d\phi = A \qquad (13.29)$$

gilt und

2) $F(D_3(H_o))$ minimal ist unter allen H, die (13.29) erfüllen und für die C_1 ein Kreis ist.

Es gibt ein solches H_o, da $D_2(H_o)$ wegen (13.26) und (9.22) mit der Potenz κ von r_o abhängt ($\kappa > 1$) und nach Voraussetzung A so gewählt ist, daß für $r_o \longrightarrow R$ gilt

$$\lim \int_0^{2\pi} D_2(H_o) \cdot r_o \cdot d\phi < A$$

(Für kleinere A gilt $S_1 \cap S_2 \neq \emptyset$, und das Problem wird physikalisch sinnlos).

Das so bestimmte H_o ist schon eine recht gute Näherungslösung, denn wegen (13.29) und (13.16) sind die Mittelwerte von u_1 und $D_2(H_o)$ gleich, wegen (13.26) bis (13.28) und der Bedingung $x(\phi) \approx 1 \quad \forall \phi \in G_1$ ist auch ihre Abhängigkeit von ϕ ähnlich, so daß der zugehörige Wert des Fehlerfunktionals $F \circ D_3(H_o)$ klein ist.

Ich betrachte nun die Menge

$$\mathcal{H}_o := \{H \in \mathcal{H} \mid Fo\, D_3(H) \leq Fo\, D_3(H_o)\} .$$

$\mathcal{H}_o$ ist das stetige Bild der Menge

$$\mathcal{F}_o := \{r \in C^2_{2\pi} \mid Fo\, D_3(H_r) \leq Fo\, D_3(H_{r_o})\}$$

versehen mit der Norm

$$\| r \|^{(2)} = \| r \|_\infty + \| \dot{r} \|_\infty + \| \ddot{r} \|_\infty$$

(siehe Anfang von §13).
Es genügt also die Kompaktheit von $\mathcal{F}_o$ zu zeigen.

Sei nun $H \in \mathcal{H}_o$, so wird $\| r - r_o \|_\infty$ sicherlich klein sein, da sonst entweder u_1 größere Schwankungen zeigen würde wegen (13.27) oder schon die Mittelwerte von u_1 und $D_2(H)$ verschieden wären, was beides einen größeren Wert von $Fo\, D_3(H)$ ergäbe.

Ebenso werden aber auch $\| \dot{r} \|_\infty$ und $\| \ddot{r} \|_\infty$ klein sein, da sonst die Krümmung $K(\phi)$ über die Kurve C_1 schwanken würde und sich auch hieraus Schwankungen von u_1 ergäben, die $Fo\, D_3(H)$ vergrößern gegenüber $Fo\, D_3(H_o)$.

Die Menge $\mathcal{F}_o$ ist also vermutlich normbeschränkt.

Es wirken sich aber auch schon starke Schwankungen in der zweiten Ableitung von r über die Krümmung von C_1 auf u_1 aus und bewirken dort Schwankungen, so daß es plausibel erscheint, daß die Menge $\mathcal{F}_0$ bezüglich der zweiten Ableitungen noch gleichgradig stetig ist. Damit wäre $\mathcal{F}_0$ dann nach dem Satz von Arzela-Ascoli kompakt, und die zweite Bedingung für die Existenz von Lösungen wäre ebenfalls erfüllt.

Alle diese Überlegungen sind allerdings nur qualitativer Art, eine streng mathematische Analyse der Abhängigkeit von u_1 von H steht noch aus.

§ 14 Die Durchführung der Rechnung

Für die konkrete Durchführung der Rechnung muß ich zunächst geeignete endlichdimensionale Teilmengen $\mathcal{H}^n \subset \mathcal{H}$ wählen. Ich nehme dazu die Mengen

$$\mathcal{H}^n := \{H \in \mathcal{H} \mid H_1(\phi) = (B_1 + r(\phi) \cos\phi \, , \, r(\phi) \sin\phi \,), \quad \phi \in G_1 \qquad (14.1)$$

$$\text{und } r(\phi) = \sum_{i=1}^{n} B_i \cos(i-1)\phi \} \; .$$

Damit ergibt sich gleich eine natürliche Einbettung von $\mathcal{H}^n$ in $\mathbb{R}^n$, indem jedem $H \in \mathcal{H}^n$ die Koeffizienten $B_1, \ldots, B_n$ zugeordnet werden.

Für diese Wahl von $\mathcal{H}^n$ sprechen vor allem zwei Gründe: Zunächst einmal ist die Darstellung der Elemente von H sehr einfach und unabhängig von einer irgendwie gewählten Diskretisation von G_1. Zum anderen zeigt es sich, daß durch die Aufnahme des "Mittelpunktes" B_1 der Darstellung unter die freien Parameter die lokale Lösung in $\mathcal{H}^n$, die vom Verfahren gefunden wird, schon für kleine n einen sehr niedrigen Wert des Fehlerfunktionals hat.

Das sich so ergebende Optimierungsproblem im $\mathbb{R}^n$ ist von der Definition her ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen, nämlich

a) $r(\phi) > 0 \qquad \forall \phi \in [0, 2\pi)$

b) die durch $H_1(\phi)$, $\phi \in [0,2\pi)$, definierte Kurve C_1 verläuft ganz innerhalb der vorgegebenen Kurve C_2.

Aus den Überlegungen des vorherigen Paragraphen folgt aber, daß bei einer vernünftigen Wahl der Anfangswerte in $\mathbb{R}^n$ eine Verkleinerung des Funktionals nur mit einem neuen Wert erreicht werden kann, der sich vom Anfangswert nur wenig unterscheidet und also die Nebenbedingungen nicht verletzt. Die Rechnung kann also - bei entsprechend sorgfältiger Wahl der Parameter - als Optimierung ohne Nebenbedingungen durchgeführt werden.

Diese Optimierungsaufgabe habe ich mit dem Verfahren von Davidon, Fletcher und Powell in der bei Polak [14,S.56] beschriebenen Form durchgeführt. Die dafür geforderte Differenzierbarkeit der Zielfunktion ist für alle Werte $(B_1, \ldots, B_n)$,

für die das diskretisierte Neumannproblem lösbar ist, gewährleistet. Dieses Verfahren läuft grundsätzlich wie folgt:

Schritt 0: Wähle einen Anfangswert $B^0 \in \mathbb{R}^n$. Falls $\nabla F(B^0) = 0$, ist das Verfahren beendet, sonst weiter bei Schritt 1.

Schritt 1: Setze $H^0 = I(n\times n\text{-Einheitsmatrix})$, $i = 0$ und $g_0 = \nabla F(B^0)$.

Schritt 2: Setze $h_i := -H^i \cdot g_i$.

Schritt 3: Berechne $\lambda_i > 0$, so daß

$$F(B^i + \lambda_i h_i) = \min \{F(B_i + \lambda h_i)) \mid \lambda \geq 0\}$$

Schritt 4: Berechne $\nabla F(B^i + \lambda_i h_i)$

Schritt 5: Wenn $\nabla F(B^i + \lambda_i h_i) = 0$, ist das Verfahren beendet, sonst setze

a) $B^{i+1} = B^i + \lambda_i h_i$

b) $g_{i+1} = \nabla F(B^{i+1})$

c) $\Delta g_i = g_{i+1} - g_i$

d) $\Delta B^i = B^{i+1} - B^i$

e) $$H^{i+1} = H^i - \frac{1}{(\Delta g_i, H^i \Delta g_i)} H^i \Delta g_i >< H^i \Delta g_i + \frac{1}{(\Delta B^i, \Delta g_i)} \Delta B^i >< \Delta B^i$$

Dabei ist für $x,y \in \mathbb{R}^n$ das dyadische Produkt $x >< y$ die $n \times n$-Matrix, deren ij-Komponente durch $x_i \cdot y_j$ gegeben ist.

Schritt 6: Setze $i = i+1$ und weiter bei Schritt 2

Für die tatsächliche Durchführung sind allerdings noch folgende Änderungen und Ergänzungen vorzunehmen.
Werden alle Rechnungen numerisch exakt ausgeführt, so stellt der Satz von Fletcher und Powell (Polak [19]) sicher, daß

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} F(B^i + \lambda h_i)\Big|_{\lambda=0} \leq 0 \qquad \forall\, i\,. \tag{14.2}$$

Da die Rechnungen aber nur mit beschränkter Genauigkeit durchgeführt werden können, wird bei jedem Schritt die Bedingung (14.2) überprüft, und falls sie nicht erfüllt ist, wird Schritt 2^* eingesetzt.
Schritt 2^* : Setze $H^i = I$, $h_i = -g_i$, weiter wie Schritt 3, d.h. der Algorithmus wird wieder initialisiert.

Weiter ist die Berechnung der Gradienten nicht mit vertretbarem Aufwand durchführbar, er wird durch Differenzenquotienten numerisch angenähert.

In Schritt 3 ist die Berechnung eines Minimums von F längs des Halbstrahls $B^i + \lambda h_i$ ebenfalls nicht exakt durchführbar. Ich habe hier das Minimum mit einem Regula-Falsi-Verfahren für die Nullstellen von

$$\frac{\partial}{\partial \lambda} F(B^i + \lambda h_i) := F_i'(\lambda)$$

gesucht, und zwar so, daß ich zunächst Werte λ^+, λ^- gesucht habe mit $F'(\lambda^-) < 0$, $F'(\lambda^+) > 0$, und dann das Regula-Falsi-Verfahren in der Form angewandt habe, in der die Nullstelle immer zwischen den Stützstellen eingeschlossen ist. Die Iteration wurde jeweils nach dem dritten Schritt nach dem erstmaligen Erreichen eines Stützpunktes λ mit $F(\lambda) < F(0)$ abgebrochen. Die Ableitung von F wurde dabei wiederum als Differenzenquotient numerisch berechnet.

Diese Rechnung wurde jeweils abgebrochen, wenn entweder F eine vorgegebene Schranke unterschritten hatte oder eine vorgegebene maximale Anzahl von Iterationsschritten (meist 10) erreicht war. Diese Zahl war so a priori gewählt, daß eine weitere Rechnung keine nennenswerte Verbesserung des Ergebnisses mehr erwarten ließ, was jeweils durch geeignete Kontrollrechnung überprüft wurde.

Besonderen Wert habe ich auf die Wahl des Anfangswertes B^0 gelegt. Ich habe jeweils eine Serie von Konfigurationen mit steigenden Stromstärken A^i, d.h. steigendem Wert von $\int u_1(\phi) d\phi$ berechnet. Die Rechnungen habe ich jeweils mit n =8 durchgeführt. Als Anfangswert hierzu wurde die Lösung desselben Problems für n = 5 gewählt, als Anfangswert hierzu wiederum die Lösung des Problems für n = 2. Die Anfangswerte hierzu habe ich aus der Lösung zu n = 8 des Problems mit nächstkleiner Stromstärke so berechnet, daß ich den alten Wert von B_1 übernommen habe und B_2 so berechnet, daß

$$\int_0^{2\pi} u_{1_{(B_1,B_2)}}\, d\phi = \int_0^{2\pi} (D_2 \circ (B_0,B_1))(\phi)\, d\phi \qquad \text{galt.}$$

Dies wird erreicht durch:
Sei $\bar{A}$ die neue Stromstärke und A die alte, so habe ich genau

$$\bar{B} = B_2 \cdot \{(\bar{A}/A) ** (1/(\kappa - 1))\} \qquad \text{gesetzt.}$$

Beim Anfang habe ich die Stromstärke berechnet, die das Plasma gerade im äußeren Rand hält und diese sowie die Daten des äußeren Randes eingesetzt.
Dieses Vorgehen spart gegenüber einem Verfahren, das nur mit n = 8 rechnet, erheblich Rechenzeit, ohne an Genauigkeit zu verlieren. Außerdem ist dabei die Gefahr geringer, daß - durch den Einfluß der Rechengenauigkeiten - die Nebenbedingungen für eine im Laufe der Rechnung auftretende Konfiguration verletzt sind.

Wesentlich für den störungsfreien Ablauf der Rechnung ist ebenfalls die Wahl der Schrittweiten für die Differenzenquotienten zur Berechnung der Ableitungen $\frac{\partial F}{\partial A_i}$ und $\frac{\partial F}{\partial \lambda}$.

Ich habe nach einigen Tests die Schrittweiten so gesetzt, daß die Änderungen der Koordinaten der Stützstellen jeweils etwa das 50-fache der kleinsten auf der Rechenanlage möglichen Änderung ausmachten. Damit scheint mir ein sinnvoller Kompromiß in der Berücksichtigung von Diskretisationsfehlern und Rundungsfehlern erreicht zu sein.

Ebenfalls wesentlich für den Rechenablauf ist die Wahl der Anfangsschrittweite bei der Minimumsuche nach der Regula falsi. Ein zu großer Schritt in λ führt hier leicht zu einer Verletzung der Nebenbedingungen.

Ich habe hier λ_1 so gewählt, daß $\|\lambda_1 \cdot h_1\|_2 = 1 \cdot 10^{-3}$ ist. Falls dann $F'(\lambda_1) \geq 0$, so verfahre ich nach der Regula falsi weiter, sonst setze ich $\lambda_2 = 2 \cdot \lambda_1$, $\lambda_3 = 2 \cdot \lambda_2$ usw.

Der Versuch, hier ein Extrapolationsverfahren zu verwenden, hat in einigen Fällen zu einer Verletzung der Nebenbedingungen geführt, ist also trotz eines gewissen Zeitgewinnes nicht ratsam.

Eine Verletzung der Nebenbedingungen bedeutet in der Regel einen Abbruch der Rechnung, da dann die Berechnung des Wertes von F nicht mehr mit dem dafür vorgesehenen Verfahren durchführbar ist.

Bei dem geschilderten Vorgehen und den Vorsichtsmaßnahmen trat dieser Fall nicht mehr auf.

Die Funktion F(B) habe ich etwas anders gewählt als in den bisherigen Überlegungen, nämlich

$$F(B) = \{ \int_0^{2\pi} (D_3(H)(B))(\phi)^2 \, d\phi \Big/ \int_0^{2\pi} (D_2(H(B)))^2 \, d\phi \}^{1/2} \quad .$$

Diese Änderung ist in dem für die Optimierung interessanten Bereich unwesentlich, da

$\int_0^{2\pi} [D_2(H(B))]^2 \, d\phi$ hier auf etwa zwei Stellen konstant ist.

Das Ergebnis wird hiervon also nicht nennenswert beeinflußt.

Dagegen wird die Durchführung des besonders kritischen Schrittes 3 des Optimierungsverfahrens dadurch erleichtert, daß für Werte von B, die die Nebenbedingungen verletzen, $D_2(H(B))$ klein und damit der Wert des Funktionals F besonders groß wird. Dadurch wird eine Verletzung der Nebenbedingungen weniger wahrscheinlich und das Programm funktionssicherer.

Die Berechnung von $D_2(H(B))$ bereitet dabei keine Schwierigkeiten. Den freien Parameter $\beta^2 - (\beta_1')^2$ habe ich dabei jeweils innerhalb einer Reihe von Rechnungen mit steigenden Stromstärken A so gewählt, daß durch den Sprung des Magnetfeldes in azimutaler Richtung ein etwa konstanter Anteil des Druckes kompensiert wird, genau

$$\beta^2 - (\beta_1')^2 = CQ \cdot A^2/(2\pi \cdot B_2)^2$$

wobei die Konstante CQ zwischen -0,5 und +0,5 variiert.

Die Berechnung von u habe ich nach den in §12 entwickelten Verfahren vorgenommen, wobei ich auf jedem Rand mit 24 Stützstellen gerechnet habe. Davon sind je 13 voneinander unabhängig, die weiteren ergeben sich durch die Spiegelsymmetrie. Damit ist die Bedingung $m > n$ aus §7 erfüllt.

Die Funktionen E,G,E',E",G',G" habe ich für $0,7 \leqslant k^2 \leqslant 1$ mit einer Schrittweite von 10^{-3} tabelliert. Die exakten Funktionswerte werden dann durch eine Interpolation von dritter Ordnung ermittelt. Dies ergibt eine Genauigkeit von 7 Stellen, damit ergibt sich dann für u eine Genauigkeit von etwa 4 Stellen.
Eine Liste des Programms ist im Anhang beigefügt.

§ 15 Die Ergebnisse

Ich habe Rechnungen durchgeführt zu $M_2 = 1$ bei verschiedenen Werten von R , CQ und verschiedenen Stromstärken A. Die Ergebnisse einiger dieser Rechnungen sind in den folgenden Tabellen und Zeichnungen festgehalten.

In allen Fällen konvergierte das Verfahren sehr schnell und erreichte einen stationären Wert. Der erreichte Wert von F legt dabei in fast allen Fällen die Vermutung nahe, daß eine Lösung im engeren Sinne existiert; nur bei einem sehr dicken Torus und schwachem Strom war dieser Wert größer als 10^{-2}, meist war er sogar kleiner als 10^{-3}.

Da nach Kontrollrechnungen mit größerer Stützstellenzahl (m = 48) der Wert von F bei m = 24 ohnehin nur mit einer Genauigkeit von $\pm 10^{-3}$ berechnet wird, ist dieses Ergebnis zufriedenstellend.

Die gefundene Konfiguration war dabei jeweils fast ein Kreistorus, die Abweichung von der Kreisform lag bei großen Werten von R und kleinen von A etwa bei 4%, sonst zwischen etwa 1% und 10^{-3}%. Die Achse des inneren Torus war dabei allerdings gegenüber der Achse des äußeren Torus deutlich nach außen verschoben, und zwar um so stärker, je größer R und A waren. Dieses Verhalten entspricht völlig den vom Experiment bekannten Tatsachen.

Die Rechnung wurde auf der Univac 1108 (Zykluszeit 750 nsec) der Gesellschaft für wissenschaftliche Datenverarbeitung,Göttingen, durchgeführt. Ein einmaliger Durchlauf des Programms mit der Berechnung von 4 Konfigurationen zu wachsenden Stromstärken, d.h. 4 mal jeweils 5 Schritte des D-F-P-Verfahrens mit n = 2 und n = 5 und 9 Schritte mit n = 8, m dabei auf 24 festgelegt, benötigte etwa 18 min. Rechenzeit.

Der Bedarf an Rechenzeit steigt deutlich schwächer als linear mit wachsendem n und etwas schwächer als quadratisch mit wachsendem m.

Weiter war der Bedarf an Rechenzeit bei großen Werten von R (R =,495) wesentlich größer als bei kleinen (z.B. R =,11), da bei großem R für Schritt 3 der Optimierung in der Regel eine grössere Anzahl von Schritten nötig war.

Ergebnisse der

Rechnung mit R = 0,11 , CQ = 0

	A = 41792		A = 63987		A = 97970		A = 150000	
B_1	1,00603		1,01033		1,01433		1,01433	
B_2	0,05763		0,03026		-0,01589		0,00839	
B_3	0,00000		0,00000		-0,00000		0,00003	
B_4	-0,00007		-0,00002		-0,00000		-0,00000	
B_5	-0,00000		0,00000		0,00000		0,00000	
B_6	0,00000		0,00000		0,00000		0,00000	
B_7	0,00000		0,00000		0,00000		0,00000	
B_8	0,00000		0,00000		0,00000		0,00000	
ν	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$
1	1154	1154	3364	3365	9812	9818	28456	28461
2	1154	1153	3364	3364	9812	9815	28456	28460
3	1154	1153	3364	3364	9812	9813	28456	28461
4	1154	1154	3364	3364	9812	9811	28456	28466
5	1154	1154	3364	3364	9812	9810	28456	28467
6	1154	1154	3364	3365	9812	9810	28456	28469
7	1154	1154	3364	3365	9812	9810	28456	28470
8	1154	1154	3364	3366	9812	9811	28456	28464
9	1154	1154	3364	3366	9812	9810	28456	28454
10	1154	1154	3364	3366	9812	9809	28456	28443
11	1154	1154	3364	3365	9812	9808	28456	28432
12	1154	1154	3364	3365	9812	9807	28456	28430
24	1154	1154	3364	3365	9812	9819	28456	28463
	F : 0,000183		F : 0,000249		F : 0,000333		F : 0,000432	

D_2 , U_1 jeweils in 100 A/m

Ergebnisse der

Rechnung mit R = 0,22 , CQ = -0,5

	A = 140571		A = 180983		A = 233013		A = 300000	
B_1	1,02356		1,03168		1,03990		1,04816	
B_2	0,08540		0,05654		0,03786		0,02541	
B_3	-0,00025		0,00001		0,00000		0,00000	
B_4	-0,00018		-0,00008		-0,00003		-0,00001	
B_5	-0,00000		-0,00000		0,00000		0,00000	
B_6	-0,00000		0,00000		0,00000		0,00000	
B_7	0,00000		0,00000		0,00000		0,00000	
B_8	0,00000		0,00000		0,00000		0,00000	
ν	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$
1	2514	2521	4971	4971	9642	9637	18592	18602
2	2523	2529	4983	4980	9657	9650	18611	18617
3	2537	2543	5002	4999	9681	9674	18643	18644
4	2556	2563	5027	5025	9714	9708	18648	18683
5	2579	2586	5057	5056	9752	9748	18733	18731
6	2606	2613	5090	5089	9794	9792	18786	18785
7	2634	2642	5125	5124	9837	9837	18840	18841
8	2661	2670	5158	5159	9879	9881	18891	18893
9	2686	2695	5188	5188	9915	9917	18936	18938
10	2706	2714	5211	5211	9943	9944	18971	18970
11	2718	2726	5226	5226	9961	9961	18992	18991
12	2723	2731	5231	5232	9967	9968	19000	18998
24	2511	2519	4968	4968	9637	9634	18585	18598
	F = 0,002926		F = 0,000237		F = 0,000403		F = 0,000238	

D_2 , U_1 jeweils in 100 A/m

Ergebnisse der

Rechnung mit R = 0,22 , CQ = 0,0

	A = 83584		A = 127975		A = 195940		A = 300000	
B_1	1,02391		1,03998		1,05284		1,05396	
B_2	0,11283		0,05840		0,03033		0,01598	
B_3	0,00009		0,00001		0,00000		0,00009	
B_4	-0,00048		-0,00012		-0,00002		-0,00000	
B_5	-0,00002		-0,00000		0,00000		0,00000	
B_6	-0,00000		-0,00000		0,00000		-0,00000	
B_7	-0,00000		-0,00000		0,00000		-0,00000	
B_8	0,00000		0,00000		0,00000		-0,00000	
ν	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$
1	1178	1178	3485	3486	10280	10283	29905	29899
2	1178	1178	3485	3486	10280	10280	29905	29903
3	1178	1178	3485	3487	10280	10278	29905	29903
4	1178	1178	3485	3488	10280	10277	29905	29898
5	1178	1179	3485	3487	10280	10277	29905	29892
6	1178	1179	3485	3487	10280	10277	29905	29887
7	1178	1179	3485	3487	10280	10278	29905	29883
8	1178	1179	3485	3487	10280	10280	29905	29878
9	1178	1179	3485	3487	10280	10281	29905	29874
10	1178	1179	3485	3486	10280	10281	29905	29873
11	1178	1179	3485	3487	10280	10282	29905	29871
12	1178	1179	3485	3487	10280	10282	29905	29870
24	1178	1178	3485	3487	10280	10284	29905	29896
	F : 0,000635		F : 0,000477		F : 0,000214		F : 0,000736	

D_2 , U_1 jeweils in 100 A/m

Ergebnisse der

Rechnung mit R = 0,22 , CQ = 0,5

	A = 61667		A = 177051		A = 104491		A = 300000	
B_1	1,02600		1,05199		1,04768		1,05324	
B_2	0,13147		0,02670		0,05906		0,01211	
B_3	0,00030		0,00028		0,00002		0,00012	
B_4	-0,00111		-0,00001		-0,00018		-0,00000	
B_5	-0,00006		0,00000		-0,00001		0,00000	
B_6	-0,00003		0,00000		-0,00000		-0,00000	
B_7	-0,00001		0,00000		-0,00000		0,00000	
B_8	-0,00000		0,00000		0,00000		0,00000	
ν	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$
1	788	787	10673	10675	2882	2881	39633	39674
2	785	784	10661	10659	2876	2875	39613	39670
3	779	779	10643	10640	2867	2866	39581	39623
4	772	771	10619	10619	2853	2853	39539	39547
5	763	762	10590	10592	2837	2837	39490	39504
6	752	751	10559	10556	2819	2819	39438	39455
7	739	739	10528	10519	2800	2800	39385	39375
8	727	725	10498	10485	2781	2781	39335	39297
9	714	713	10472	10459	2764	2765	39292	39265
10	704	703	10452	10438	2751	2751	39259	39237
11	697	696	10439	10424	2742	2742	39238	39185
12	695	694	10434	10419	2739	2739	39231	39155
24	789	788	10676	10682	2885	2884	39640	39662
	F : 0,001289		F : 0,000853		F : 0,000257		F : 0,000869	

D_2 , U_1 jeweils in 100 A/m

Ergebnisse der

Rechnung mit R = 0,495 , CQ = 0

	A = 188065		A = 287943		A = 440864		A = 675000	
B_1	1,13132		1,17275		1,20934		1,22240	
B_2	0,22034		0,11278		0,05736		0,02986	
B_3	-0,00293		0,00018		0,00009		0,00019	
B_4	-0,00416		-0,00074		-0,00014		-0,00002	
B_5	-0,00051		-0,00003		-0,00000		0,00000	
B_6	-0,00031		-0,00002		-0,00000		0,00000	
B_7	-0,00012		-0,00001		-0,00000		0,00000	
B_8	-0,00006		-0,00000		0,00000		0,00000	
ν	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$	$D_2(\phi_\nu)$	$U_1(\phi_\nu)$
1	1375	1361	4068	4058	12237	12236	36006	35987
2	1375	1364	4068	4059	12237	12233	36006	35991
3	1375	1366	4068	4061	12237	12232	36006	35975
4	1375	1359	4068	4061	12237	12231	36006	35967
5	1375	1354	4068	4061	12237	12231	36006	35977
6	1375	1356	4068	4063	12237	12232	36006	35985
7	1375	1357	4068	4064	12237	12232	36006	35982
8	1375	1364	4068	4065	12237	12232	36006	35983
9	1375	1375	4068	4066	12237	12231	36006	35994
10	1375	1375	4068	4067	12237	12230	36006	35991
11	1375	1371	4068	4066	12237	12230	36006	35967
12	1375	1348	4068	4066	12237	12230	36006	35952
14	1375	1362	4068	4069	12237	12239	36006	35970

§ 16 Zusammenfassung und Ausblick

Ich habe in der vorstehenden Arbeit eine Formulierung von Problemen mit freiem Rand als Probleme der nichtlinearen Optimierung angegeben. Dabei habe ich den Lösungsbegriff dahingehend erweitert, daß nun Konfigurationen gesucht werden, die in einem vorgegebenen Sinne die kleinste Abweichung vom Gleichgewicht unter allen benachbarten Konfigurationen haben.

Diese Erweiterung des Lösungsbegriffes erlaubt die Konstruktion von Verfahren, deren Konvergenz sich schon unter relativ schwachen Bedingungen an das Problem zeigen läßt, wie Kompaktheit des Argumentbereichs und strikte Konvexität des zu minimierenden Funktionals.

Die so gefundenen Lösungen sind physikalisch von Interesse, auch wenn das ursprüngliche Problem mit freiem Rand keine Lösung hat. Hat das ursprüngliche Problem eine Lösung, so stimmt die gefundene Lösung des umgeformten Problems für geeignete Anfangswerte mit dieser überein.

Die Optimierungsverfahren sind numerisch wesentlich stabiler als die direkten Verfahren zur Lösung von Problemen mit freiem Rand, ohne dabei wesentlich rechenaufwendiger zu sein.

Mit einem solchen Optimierungsverfahren habe ich das Problem des toroidalen Pinches behandelt. Es ergab sich mit vergleichsweise geringem Rechenaufwand eine hohe Genauigkeit der Ergebnisse; die Ergebnisse waren unabhängig vom Anfangswert, solange die Nebenbedingungen des Problems nicht verletzt wurden. Sie legen die Vermutung nahe, daß das Problem für vernünftige Wahlen der Parameter exakt lösbar ist.

Weiterhin offen bleiben die Fragen zur Lösbarkeit des ursprünglichen Problems. Um hier Lösbarkeitsbedingungen aufstellen zu können, wäre noch eine detailliertere Analyse der Abhängigkeit der Lösung des homogenen Neumannproblems vom Gebiet nötig.

Verbesserungen des numerischen Verfahrens lassen sich vermutlich noch erzielen durch noch günstigere Wahl der Darstellung der Konfigurationen, z.B. indem man als Parameter die wesentlichen physikalischen Eigenschaften wie Oberfläche, Volumen etc. ansetzt. Es ist allerdings nicht sicher, daß der damit verbundene Mehraufwand durch bessere Konvergenz belohnt wird.

Weitere Möglichkeiten könnten sich ergeben durch Änderungen in der Wahl der Anfangskonfiguration. Hier geht die Kenntnis des physikalischen Systems wesentlich ein.

Noch zu untersuchen wäre das Stabilitätsverhalten der Gleichgewichtskonfiguration, da sich die Ergebnisse der bisherigen Stabilitätsrechnungen, die an Konfigurationen durchgeführt wurden, die die Gleichgewichtsbedingungen nicht erfüllen, nur bedingt übertragen lassen. Einen Anhaltspunkt könnte die Arbeit [13] von Martensen geben. Danach wäre eine Konfiguration um so stabiler, je besser sie die Gleichgewichtsbedingungen erfüllt. Die Gleichgewichtskonfigurationen wären dann jedenfalls nicht weniger stabil, als Martensen es unter der Annahme errechnete, daß das Plasmagebiet einen Kreistorus bildet.

L i t e r a t u r v e r z e i c h n i s

[1] Becker, Berghoff, Klingelhöfer
Hohlpincherzeugung mit kondensierten Molekülstrahlen,
Zeitschrift Naturforschung 22a (1967), S.589 ff.

[2] Bernstein, Friemann, Kruskal, Kulsrud
An energie principle for hydromagnetic stability
problems, Proc. Roy. Soc. Lond. A 244 (1958), S.17 ff.

[3] Blanks, Friedrichs, Grad
Theory of Maxwell's equations without displacement
current, Theory on Magneto-Hydrodynamics V.
AEC Research and Development Report NYO - 6486,
Inst. of Math. Sciences, N.Y. University (1957)

[4] Brosowski, de Vries
Über die numerische Behandlung gewisser potential-
theoretischer Probleme mit freiem Rand,
Meth. u. Verf. d. Math. Phys., Bd.2 (1969), S.161 ff.

[5] Cryer
The approximate solution of free boundary problems
using finite differences, J. of ACM 17 (1970), S.397 ff

[6] Fox, Sankar
The Regula - Falsi - Method for free boundary problems
J. of Inst. of Math. a. Appl. 12 (1973), S.49 ff

[7] Karr, Knapp, Osher
Energy loss from a toroidal pinch discharge,
Phys. Fluids 4 (1961), S.424 ff.

[8] Kress
Grundzüge einer Theorie der verallgemeinerten harmoni-
schen Vektorfelder, Meth. u. Verf. d. Math. Phys.,
Bd.2 (1969), S.49 ff.

[9] Lewy
A note on harmonic functions and a hydrodynamical appli-
cation, Proc. Amer. Math. Soc. 3 (1952), S.111-113

[10] Lüst, Suydam, Richtmeyer, Rotenberg, Lewy
Hydromagnetic stability of a toroidal gas discharge,
Phys. Fluides 4 (1961), S.891 ff.

[11] Martensen, von Sengbusch
Harmonische Vektorfelder
Arch. Rat. Mech. Anal (1960)

[12] Martensen
Über eine Methode zum räumlichen Neumannschen Problem
mit Anwendungen für torusartige Berandungen,
Acta Mathematica (1963), S.75 ff.

[13] Martensen
Das Stabilitätsverhalten eines Plasmatorus mit Oberflächenströmen, Z. Naturforschung 17a (1962), S.733 ff.

[14] Polak
Computional Methods in Optimization
Academic Press (1971) New York, London.

[15] Southwell, Vaisey
Calculations of flow through a circular orifice,
Phil. Trans. Roy. Soc. Lond. A 240 (1948), S.117 ff.

[16] Spitzer
The Stellarator concept
Phys. Fluid 1 (1958), S.253 ff.

[17] Steffen
Eine Bemerkung zu ebenen Problemen der Laplacegleichung auf freien Rändern, Meth. u. Verf. d. Math. Phys. 7 (1972), S.155 ff.

[18] Steffen
Ein numerisches Verfahren zur Behandlung von dreidimensionalen Problemen der Laplacegleichung mit freiem Rand, Meth. u. Verf. d. Math. Phys. 10 (1973), S.1 ff.

[19] Trefftz
Über die Kontraktion kreisförmiger Flüssigkeitsstrahlen,
Z. Math. Phys. 64 (1916), S.64 ff.

A N H A N G

Das Programm I - XIX

Konfigurationen zu den Ergebnissen von Seite 68 - 72 XX - XXIV

Konfigurationen zu den Ergebnissen von Seit 68, 70 und 72 übereinandergezeichnet XXV

```
C ***                  H A U P T P R O G R A M M                    ***
C
      PARAMETER N=12
     1   ,NP=2*N,Z=N+1,NP2=NP+2,NP3=NP+3
     2   ,LP=201
      INTEGER STR3,STR4,STR5
C
C ***                     DIMENSONIERUNG DER FELDER                 ***
C
      DIMENSION STADI(NP),STRIDS(NP),STRADS(NP)
     1   ,RI(NP),RIP(NP),JC(NP2),XI(NP),XIP(NP)
     2   ,YI(NP),YIP(NP),XA(NP),XAP(NP),YA(NP),YAP(NP)
     3   ,KIA(NP,NP),KAI(NP,NP)
     4   ,KIS(NP,NP),KISS(NP,NP),AHI(Z,Z),AMAT(NP2,NP3)
     5   ,SINA(NP),COSA(NP),R(NP),E(LP),G(LP)
     6   ,ES(LP),ESS(LP),GS(LP),GSS(LP)
     7   ,GRAD(N),GRANEU(N),GRADIF(N),AHE(N,N)
     8   ,CI(NP),CA(NP),CIA(NP)
     9   ,AI(N),AINEU(N),AISCHR(N)
      DIMENSION STR3(6),STR4(5),STR5(5)
C
C ***              ANFANGSWERTZUWEISUNG FUER FORMATVARIABLE          ***
C
      DATA/STR3/'(0(1X,3(2H A,I1,3H = ,F7.5,1X)/))'/
     1   STR4/'(1H+,0(2H A,I1,3H = ,F7.5,1X))'/
     2   STR5/'(02(I8',',F15.0',',F16.0',',F20.0',',/))'/
     3   IZ2/'@[@@@@'/IZ3/'@@[@@@'/
     4   IZ6/'@@@@@['/
C
C ***                  VEREINBARUNG DER FORMATE                     ***
C
  100 FORMAT( )
  200 FORMAT('0 INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON '
     1   ,F9.0,' A.')
  300 FORMAT('    DER RAND IST GEGEBEN DURCH DIE KOEFFIZIENTEN DER'/
     1  ' COSINUS-REIHE SEINER DARSTELLUNG IN TOROIDALEN POLAR'
     2' ,'KOORDINATEN '/' VOM PUNKT (',F7.5,',0.) AUS, DIE '
     3     ,' KOEFFIZIENTEN SIND:')
  400 FORMAT(' MIT DIESEM RAND ERGIBT SICH EIN VOLUMEN DES',
     1   ,' PLASMAS VON ',F6.4,' M**3.'/' DAZU GEHOERT EIN DRUCK VON '
     2   ,F8.4,' AT.')
  500 FORMAT('0 ZU DIESER KONFIGURATION GEHOEREN FOLGENDE '
     1 ,'STROMVERTEILUNGEN :'//1X,7H NR DES,6X,
     2 26HSTROM AUF DEM INNEREN RAND,9X,
     3 13HSTROM AUF DEM/1X,7HSTUETZ-,10X,17HBERECHNET AUS DER,
     4 16X,9HAEUSSEREN/1X,7HPUNKTES,3X,15HDRUCKBEDINGUNG,
     5 4X,13HDIFFERENTIAL-,12X,4HRAND/32X,9HGLEICHUNG/)
  600 FORMAT('  JEWEILS IN AMPERE PRO METER'//
     1 ' DIES ERGIBT EINEN WERT DES'
     2  ,' FEHLERFUNKTIONALS VON ',F8.6/'1')
  700 FORMAT('0 UNTERPROGRAMM OPTIM VORZEITIG ABGEBROCHEN ')
  800 FORMAT('0 NEGATIVER RADIUS ')
  900 FORMAT('1 BERECHNUNG EINER GLEICHGEWICHTSKONFIGURATION '
     1 'EINES PLASMATORUS'/' IN EINEM MAGNETFELD.  DABEI WERDEN '
     2  'FOLGENDE PARAMETER ANGENOMMEN :'/' CP/CV DES PLASMAS = '
     3  ,F6.3/' ANFANGSDRUCK = ',F8.6,' AT.'/' AEUSSERER STROM VON '
     4  ,F9.0,' BIS ',F9.0,' A.'/' DER AEUSSERE RAND ENTSTEHT DURCH'
     5 ,' DREHUNG EINER ELLIPSE, '/' DIE DIE ACHSEN ',F6.4,' M UND'
     6 ,F6.4,' M HAT UND DEREN MITTELPUNKT'/' EINEN ABSTAND VON ',F6.3,
     7 ' M VON DER DREHACHSE HAT.'/' DER SPRUNG DES AZIMUTALEN '
     8 ,'MAGNETFELDES BETRAEGT IM MITTEL ' I3,'% DES SPRUNGS'/
     9 ' DES MERIDIONALEN FELDES.'///)
```

```
 1000 FORMAT('0EIN AZIMUTALER STROM VON  ',F8.0,' A GENUEGT GERADE,'
     1    ' UM DEN ANFANGSDRUCK ZU '/' KOMPENSIEREN, DER INNERE RAND '
     2    'IST DABEI GLEICH DEN AEUSSEREN RAND. DAMIT'/' BEGINNT '
     3    ,'DAS VERFAHREN BEI EINER EXAKTEN LOESUNG UND SUCHT '
     4    ,'VON DIESER'/' AUSGEHEND NAEHERUNGSLOESUNGEN ZU '
     5    ,'STAERKEREN STROEMEN.'///)
 1100 FORMAT(' ',4(E13.5,','),E13.5)
      IK=MOD(Z,10)
      IKZ=(Z-IK)/10
      STR5(1)=STR5(1)+IKZ*IZ2+IK*IZ3
      PI=3.1415927
C
C ***  ELINT BERECHNET TABELLEN DER FUNKTIONEN E, G, E*, E**, G*    ***
C ***  UND G** UND SPEICHERT SIE IN DIE VEKTOREN E, G, ES, ESS, GS ***
C ***  UND GSS; GEWI BERECHNET TABELLEN FUER SINUS, COSINUS UND     ***
C ***  DIE GEWICHTE R DER INTEGRATION IM CAUCHY'SCHEN HAUPTWERT.    ***
C
      CALL ELINT(E,G,ES,ESS,GS,GSS,LP)
      CALL GEWI(SINA,COSA,R,N)
C
C ***  EINLESEN DER PARAMETER UND BERECHNUNG DER PARAMETERABHAEN-   ***
C ***                    GIGEN FORMATE.                             ***
C
      READ 100 ,L1,L2,GSCHR,M,NA,NM,NS,CANT,IZ
      READ 100 ,DRUCK0,GESTM,AKPP
      ICANT=CANT*100.
      WRITE(7, 100 ) ICANT
      NH=N/2
      NF=MOD(NM-1,3)
      IF ( NF .EQ. 0 ) NF=3
      LF=NM-NF-1
      MF=LF/3
      LF1=LF+1
      LF2=LF+2
      STR3(1)=STR3(1)+IZ2*MF
      STR4(1)=STR4(1)+IZ4*MF
C
C ***  RANDA BERECHNET DIE CARTESISCHEN KOORDINATEN DES AEUSSEREN   ***
C ***  RANDES SOWIE  DEREN ABLEITUNGEN AUS EINGABEDATEN UND SPEI-   ***
C ***  CHERT SIE IN XA, YA, XAP UND YAP AB; REKERS BERECHNET DIE    ***
C ***  WERTE DER INTEGRALKERNE K* UND K** AN DEN STUETZSTELLEN DES  ***
C ***  AEUSSEREN RANDES UND SPEICHERT SIE IN KS UND KSS AB, UND     ***
C ***  MAFEST BERECHNET DANN DARAUS DEN VON DEM INNEREN RAND UNAB-  ***
C ***  HAENGIGEN TEIL DER KOEFFIZIENTENMATRIX ZUR NAEHERUNGSWEISEN  ***
C ***  LOESUNG DER INTEGRALGLEICHUNG UND SPEICHERT IHN IN AHI.      ***
C
      CALL RANDA(XMA,XA,XAP,YA,YAP,SINA,COSA,VOL0,NP)
      GA=XA(NP)-XMA
      CALL REKERS(KIS,KISS,XA,XAP,YA,YAP,ES,ESS
     1    ,GS,GSS,COSA,NP,LP)
      CALL MAFEST(AHI,R,KIS,KISS,CA,NP,Z)
C
C ***  GEST GIBT DIE STROMSTAERKE AN, DIE NOETIG WAERE, UM DAS      ***
C ***  PLASMA NUR DURCH DEN MAGNETISCHEN DRUCK IM AEUSSEREN RAND    ***
C ***  EINZUSCHLIESSEN. GESTF IST DER QUOTIENT DER STROMSTAERKEN    ***
C ***             ZU ZWEI AUFEINANDER FOLGENDEN RECHNUNGEN.         ***
C
      GEST=SQRT(DRUCK*.8*PI*1.E12)/(1.+CANT)*2.*YAP(NP)
      GESTF=(GESTM/GEST)**(1./M)
      GEST0=GEST
      RN=1./GESTF**(1./(AKPP-1.))
      WRITE(6, 900 ) AKPP,DRUCK0,GEST,GESTM,GA,YA(NH),XMA,ICANT
```

```
      WRITE(6, 1000 ) GESTRO
      AI(1)=XMA
      AI(2)=YA(NM)
C
C      DURCHFUEHRUNG DER RECHNUNG ZU M VERSCHIEDENEN STROMSTAERKEN.***
C
      DO 1500 KR=1,M
C
C ***  BERECHNUNG DER STROMSTAERKE UND DRUCKEN EINER KOPFZEILE.     ***
C
      GESTRO=GESTRO*GESTF
      WRITE(6, 200 ) GESTRO
C
C ***              BERECHNUNG DER STARTWERTE DER OPTIMIERUNG.        ***
C
      DO 1200 K=2,NA
      AI(K)=AI(K)*RQ
 1200 CONTINUE
      NR1=NA+1
      DO 1300 K=NR1,NM
      AI(K)=0.
 1300 CONTINUE
      DO 1400 NR=NA,NM,NS
      LIMIT=L1
      IF ( NR .EQ. NM ) LIMIT=L2
C
C ***  OPTIM FUEHRT DAS D-F-P - VERFAHREN MIT NR FREIEN PARAMETERN ***
C ***  DURCH. LIMIT IST DABEI DIE MAXIMALE ANZAHL DER ITERATIONS-  ***
C ***                  SCHRITTE DES VERFAHRENS.                    ***
C
      CALL OPTIM(S 1600 ,S 1700 ,LIMIT,NR,NP,LP,FNORA,IZ
     1           ,DRUCK,DRUCK0,GESTRO,VOL,AKPP,CANT,STADI
     2           ,STRIDS,STRADS,RI,RIP,JC,VOL0
     3           ,XI,XIP,YI,YIP,XA,XAP,YA,YAP
     4           ,KIA,KAI,KIS,KISS,AHI,AMAT
     5           ,SINA,COSA,R,E,G,ES,ESS,GS,GSS
     6           ,AHE,GRAD,GRADIP,GRANEU,CI,CA,CIA
     7           ,AI,AINEU,AISCHR,GSCHR)
 1400 CONTINUE
C
C ***              AUSDRUCKEN UND AUSSTANZEN DER ERGEBNISSE.         ***
C
      WRITE(6, 300 ) AI(1)
      IF ( LF .GE. 0 )
     1WRITE(6,STR3) (K,AI(K),K=2,LF1)
      WRITE(6,STR4) (K,AI(K),K=LF2,NM)
      WRITE(7, 100 ) NM
      WRITE(7, 1100 ) (AI(K),K=1,NM),GESTRO
      WRITE(6, 400 ) VOL,DRUCK
      N0=NP
      WRITE(6, 500 )
      WRITE(6,STR5) (K,STADI(K),STRIDS(K),STRADS(K),K=1,N),
     1    N0,STADI(NP),STRIDS(NP),STRADS(NP)
      WRITE(6, 600 ) FNORA
 1500 CONTINUE
      STOP
 1600 CONTINUE

C ***  FEHLERAUSGANG, FALLS DIE INTEGRALGLEICHUNG NICHT LOESBAR     ***
C ***                                IST.                           ***

      WRITE(6, 700 )
```

```
      STOP
 1700 CONTINUE
C
C ***  FEHLERAUSGANG, FALLS DIE OPTIMIERUNG ZU NEGATIVEN RADIEN     ****
C ***                              FUEHRT.                          ****
C
      WRITE(6, 800 )
      WRITE(11, 100 )  AI,STADI,STRIDS
      STOP
      END
```

```
      SUBROUTINE KOORD(*,AI,NR,RI,RIP,COSA,SINA,NP)
      DIMENSION AI(NR),RI(NP),RIP(NP),COSA(NP),SINA(NP)
C   ------------------------------------------------------------------
C   DAS UNTERPROGRAMM KOORD BERECHNET AUS DEN IN AI(2) BIS AI(NR)
C   GESPEICHERTEN KOEFFIZIENTEN DER COSINUSREIHE EINER FUNKTION DIE
C   FUNKTIONSWERTE AN DEN STELLEN 2*PI*K/NP,  K=1,...,NP SOWIE DIE
C   WERTE DER ABLEITUNG UND SPEICHERT SIE IN DEN VEKTOREN RI UND RIP.
C   ------------------------------------------------------------------
  100 FORMAT(' ',6E12.4)
      DO 130 K=1,NP
      S=AI(2)
      SP=0.
      IF ( NR .LE. 2 ) GOTO 120
      NK=NR-1
      DO 110 I=2,NK
      L=K*I-K
      L=MOD(L,NP)
      IF ( L .EQ. 0 ) L=NP
      SP=SP+AI(I+1)*(I-1)*SINA(L)
      S=S+AI(I+1)*COSA(L)
  110 CONTINUE
  120 CONTINUE
      RIP(K)=SP
      RI(K)=S
      IF ( S ) 140 , 140 , 130
  130 CONTINUE
      RETURN
  140 CONTINUE
      WRITE(11, 100 ) (AI(I),I=1,NR)
      RETURN 1
      END
```

```
      SUBROUTINE OPTIM(*,*,LINIT,M,NP,LP,FNORA,IZ
     1   ,DRUCK,DRUCKØ,GESTRO,VOL,AKPP,CQAQ,STADI
     2   ,STRIDS,STRADS,RI,RIP,JC,VOLØ
     3   ,XI,XIP,YI,YIP,XA,XAP,YA,YAP
     4   ,KIA,KAI,KIS,KISS,AHI,AMAT
     5   ,SINA,COSA,R,E,G,ES,ESS,GS,GSS
     6   ,AHE,GRAD,GRADIF,GRANEU,CI,CA,CIA
     7   ,AI,AINEU,AISCHR,GSCHR)
C
C  ------------------------------------------------------------------
C
C  *** DAS UNTERPROGRAMM OPTIM ERMITTELT NAEHERUNGSWEISE DAS MINI-  ***
C  *** MUM EINER FUNKTION VON M VARIABLEN NACH DEM D-F-P - VERFAH-  ***
C  *** REN. DER ANFANGSWERT DES ARGUMENTS WIRD DABEI VOM HAUPTPRO-  ***
C  *** GRAMM UEBER DEN VEKTORIELLEN PARAMETER AI UEBERGEBEN, DER    ***
C  *** NACH ABSCHLUSS DER RECHNUNG DAS ERGEBNIS ENTHAELT, D. H. DAS ***
C  *** ZUM MINIMALEN FUNKTIONSWERT GEHOERIGE ARGUMENT.              ***
C
C  ------------------------------------------------------------------
C
  100 FORMAT( )
      N=NP/2
      DIMENSION GRAD(1),GRANEU(1),GRADIF(1),AI(1)
     1   ,AINEU(1),AISCHR(1),AHE(N,N)
C
C  *** DAS UNTERPROGRAMM REFEHL BERECHNET ZU EINEM VORGEGEBENEN     ***
C  *** ARGUMENT AI DEN FUNKTIONSWERT FNORM DER ZU MINIMIERENDEN     ***
C  ***                          FUNKTION.                           ***
C
      CALL REFEHL($ 1600 ,$ 1700 ,AI,FNORM,M,NP,LP,AKPP
     1          ,DRUCK,DRUCKØ,GESTRO,VOL,CQAQ,STADI
     2          ,STRIDS,STRADS,RI,RIP,JC,VOLØ
     3          ,XI,XIP,YI,YIP,XA,XAP,YA,YAP
     4          ,KIA,KAI,KIS,KISS,AHI,AMAT
     5          ,SINA,COSA,R,E,G,ES,ESS,GS,GSS
     6          ,CI,CA,CIA)
C
C  *** NAEHERUNGSWEISE BERECHNUNG DES NEGATIVEN GRADIENTEN GRAD     ***
C  ***                  DURCH DIFFERENZENQUOTIENTEN.                ***
C
      DO 200 I=1,M
      AI(I)=AI(I)-GSCHR
      CALL REFEHL($ 1600 ,$ 1700 ,AI,FNO,M,NP,LP,AKPP
     1          ,DRUCK,DRUCKØ,GESTRO,VOL,CQAQ,STADI
     2          ,STRIDS,STRADS,RI,RIP,JC,VOLØ
     3          ,XI,XIP,YI,YIP,XA,XAP,YA,YAP
     4          ,KIA,KAI,KIS,KISS,AHI,AMAT
     5          ,SINA,COSA,R,E,G,ES,ESS,GS,GSS
     6          ,CI,CA,CIA)
      GRAD(I)=(FNO-FNORM)/GSCHR
      AI(I)=AI(I)+GSCHR
  200 CONTINUE
C
C  ***              AUSGABE VON KONTROLLINFORMATIONEN.              ***
C
      WRITE(11, 100 ) M
      WRITE(11, 100 ) (AI(I),I=1,N)
      WRITE(11, 100 ) (GRAD(I),I=1,M)
C
C  *** DIE MATRIX AHE WIRD ITERATIV DER MATRIX DER ZWEITEN ABLEI-   ***
C  *** TUNGEN DER FUNKTION ANGENAEHERT. SIE DIENT ZUR BERECHNUNG    ***
C  *** DES MINIMIERUNGSSCHRITTES AUS DEM GRADIENTEN DER FUNKTION.   ***
```

```
      DO 400 I=1,M
      DO 300 J=1,M
      AHE(I,J)=0.
  300 CONTINUE
      AHE(I,I)=1.
  400 CONTINUE
C
C  *** BERECHNUNG DES MINIMIERUNGSSCHRITTES AISCHR AUS GRAD UND AHE ***
C
      DO 1300 K=1,LIMIT
      GRAN=0.
      DO 600 I=1,M
      SU=0.
      DO 500 J=1,M
      SU=SU+AHE(J,I)*GRAD(J)
  500 CONTINUE
      AISCHR(I)=SU
      GRAN=GRAN-GRAD(I)*AISCHR(I)
  600 CONTINUE
C
C  *** IST DAS SKALARPRODUKT VON GRAD UND AISCHR NEGATIV, SO HABEN  ***
C  *** RUNDUNGSFEHLER ERHEBLICHEN EINFLUSS AUF AHE GEWONNEN, UND    ***
C  *** DAS VERFAHREN WIRD NEU INITIALISIERT. DANACH WIRD AISCHR NEU ***
C  ***                              BERECHNET.                      ***
C
      IF ( GRAN .LE. 0. ) GOTO 900
      GRAN=0.
      DO 800 J=1,M
      DO 700 I=1,M
      AHE(J,I)=0.
  700 CONTINUE
      AHE(J,J)=1.
      AISCHR(J)=GRAD(J)
      GRAN=GRAN - GRAD(J)**2
  800 CONTINUE
  900 CONTINUE
      FNORA=FNORM
C
C  *** DAS UNTERPROGRAMM SUMIN SUCHT DAS MINIMUM DER FUNKTION       ***
C  *** LAENGS DES STRAHLS  AI + V*AISCHR, V>0  UND UEBERGIBT DAS    ***
C  *** ERGEBNIS IM PARAMETER VQ. AINEU ERHAELT DABEI DEN WERT       ***
C  ***                          AI + VQ*AISCHR.                     ***
C
      CALL SUMIN($ 1600 ,$ 1700 ,FNORA,GRAN,M,VQ,N,LP,TZ
     1          ,DRUCK,DRUCK0,GESTRO,VOL,AKPP,COAD,STADI
     2          ,STPIDS,STRADS,RI,RIP,JC,VOL0
     3          ,XI,XIP,YI,YIP,XA,XAP,YA,YAP
     4          ,KIA,KAT,KIS,KISS,AHI,AMAT
     5          ,SINA,COSA,P,F,G,ES,ESS,GS,GSS
     6          ,AISCHR,AI,AINEU
     7          ,CI,CA,CIA)
C
C  *** ABFRAGEN AUF BEENDIGUNG DES VERFAHRENS WEGEN ERREICHEN DER   ***
C  *** MAXIMALEN SCHRITTZAHL ODER DER VORGEGEBENEN GENAUIGKEIT.     ***
C
      IF ( K .EQ. LIMIT ) GOTO 1400
      IF ( FNORA .LE. 1.E-4 ) GOTO 1400
C
C  *** BERECHNUNG DES NEUEN WERTES DES GRADIENTEN GRANEU AM PUNKT   ***
C  ***                              AINEU.                          ***
C
```

```
      DO 1000 I=1,M
      AINEU(I)=AINEU(I)-GSCHR
      CALL REFEHL($ 1600 ,$ 1700 ,AINEU,FNO,M,NP,LP,AKPP
     1          ,DRUCK,DRUCK0,GESTRO,VOL,COAG,STADI
     2          ,STRIDS,STRADS,RI,RIP,JC,VOL0
     3          ,XI,XIP,YI,YIP,XA,XAP,YA,YAP
     4          ,KIA,KAI,KIS,KISS,AHI,AMAT
     5          ,SINA,COSA,R,E,G,ES,ESS,GS,GSS
     6          ,CI,CA,CIA)
      GRANEU(I)=(FNO-FNORA)/GSCHR
      AINEU(I)=AINEU(I)+GSCHR
 1000 CONTINUE
      DO 1100 I=1,M
      GRADIF(I)=GRANEU(I)-GRAD(I)
      AISCHR(I)=AISCHR(I)*VQ
 1100 CONTINUE
C
C  *** REHNEU BERECHNET DEN NEUEN WERT DER MATRIX AHE.                  ***
C
      CALL REHNEU($ 1400 ,AISCHR,GRADIF,AHE,GRANEU,M,N)
C
C  *** UMSPEICHERUNG VON ARGUMENT,GRADIENT UND FUNKTIONSWERT FUER       ***
C  ***          DEN NAECHSTEN ITERATIONSSCHRITT.                        ***
C
      DO 1200 I=1,M
      GRAD(I)=GRANEU(I)
      AI(I)=AINEU(I)
 1200 CONTINUE
      FNORM=FNORA
C
C  ***               AUSGABE VON KONTROLLINFORMATIONEN.                 ***
C
      WRITE(11, 100 ) K
      WRITE(11, 100 ) (AI(I),I=1,M)
      WRITE(11, 100 ) (GRAD(I),I=1,M)
      WRITE(11, 100 ) (AISCHR(I),I=1,M)
C
C  ***          ENDE DES OPTIMIERUNGSSCHRITTS.                          ***
C
 1300 CONTINUE
C
C  *** ENDE DES UNTERPROGRAMMS OPTIM, UMSPEICHERUNG DER ERGEBNISSE      ***
C  ***                    AUF DEN PARAMETER AI.                         ***
C
 1400 CONTINUE
      DO 1500 I=1,M
      AI(I)=AINEU(I)
 1500 CONTINUE
      RETURN
C
C
C  ***                                FEHLERAUSGAENGE                   ***
C
 1600 CONTINUE
      RETURN 1
 1700 CONTINUE
      RETURN 2
      END
```

```
      SUBROUTINE SUMIN(*,*,F0,GR,M,VQ,N,LP,IZ
     1    ,DRUCK,DRUCK0,GESTRO,VOL,AKPP,COAO,STADI
     2    ,STRIDS,STRADS,RI,RIP,JC,VOL0
     3    ,XI,XIP,YI,YIP,XA,XAP,YA,YAP
     4    ,KIA,KAI,KIS,KISS,AHI,AMAT,SINA,COSA
     5    ,R,E,G,ES,ESS,GS,GSS,AISCHR,AI
     6    ,AINEU,CI,CA,CIA)
      DIMENSION AI(1),AINEU(1),AISCHR(1)
  100 FORMAT( )
C
C    ------------------------------------------------------------------
C    *  DAS UNTERPROGRAMM SUMIN SUCHT DAS MINIMUM DES FEHLERFUNKTIO-  *
C    *  NALS F LAENGS DER GERADEN AI + U*AISCHR  MIT HILFE DER REGULA *
C    *  FALSI ANGEWANDT AUF DIE ABLEITUNG DES FEHLERFUNKTIONALS NACH  *
C    *  U. DIE ABLEITUNG WIRD NUMERISCH DURCH DIFFERENZENQUOTIENTEN   *
C    *  ANGENAEHERT, DIE ABLEITUNG IM PUNKTE U=0 HAT DEN WERT GR, DER *
C    *  AUS DEM UNTERPROGRAMM OPTIM UEBERNOMMEN WIRD.  GR IST NACH    *
C    *  KONSTRUKTION NEGATIV. ZUNAECHST WIRD NUN EIN WERTEPAAR S,T    *
C    *  GESUCHT MIT F'(S) < 0 < F'(T) UND DANACH DURCH IZ-MALIGE AN-  *
C    *  WENDUNG DER REGULA FALSI EIN WERT VQ MIT F'(VQ) NAHE 0 BE-    *
C    *  STIMMT. DIE REGULA FALSI WIRD DABEI IN DER FORM VERWANDT, IN  *
C    *  DER DIE STUETZSTELLEN IMMER DIE NULLSTELLE EINSCHLIESSEN.     *
C    *  FUEHRT DIE SUCHE AM ANFANG NACH 8 SCHRITTEN NICHT ZU EINEM    *
C    *  ERFOLG, SO WIRD DIE REGULA FALSI MIT DEM BISHER ABGESUCHTEN   *
C    *  INTERVALL DURCHGEFUEHRT. DIES WIRD IM AUSDRUCK SICHTBAR.      *
C    ------------------------------------------------------------------
C
      NP=2*N
      AF=0.
      BF=0.
      D1=GR
      T=0.
      ANO =QNOR(AISCHR,M)
      SD=1E-6/ANO
      TA=1E-3/ANO
      WRITE(11, 100 ) F0,SD,D1
      S=T
      D2=D1
      ME=0
  120 CONTINUE
      DO 130 K=1,M
      AINEU(K)=AI(K)+TA*AISCHR(K)
  130 CONTINUE
C
C    ***  DAS UNTERPROGRAMM REFEHL BERECHNET ZU AINEU DEN WERT       ***
C    ***  DES FEHLERFUNKTIONALS UND SPEICHERT IHN IN FNOR1.          ***
C
      CALL REFEHL($ 210 ,$ 220 ,AINEU,FNOR1,M,NP,LP,AKPP
     1        ,DRUCK,DRUCK0,GESTRO,VOL,COAO,STADI
     2        ,STRIDS,STRADS,RI,RIP,JC,VOL0
     3        ,XI,XIP,YI,YIP,XA,XAP,YA,YAP
     4        ,KIA,KAI,KIS,KISS,AHI,AMAT
     5        ,SINA,COSA,R,E,G,ES,ESS,GS,GSS
     6        ,CI,CA,CIA)
      DO 140 K=1,M
      AINEU(K)=AI(K)+(TA+SD)*AISCHR(K)
  140 CONTINUE
      CALL REFEHL($ 210 ,$ 220 ,AINEU,FD    ,M,NP,LP,AKPP
     1        ,DRUCK,DRUCK0,GESTRO,VOL,COAO,STADI
     2        ,STRIDS,STRADS,RI,RIP,JC,VOL0
     3        ,XI,XIP,YI,YIP,XA,XAP,YA,YAP
     4        ,KIA,KAI,KIS,KISS,AHI,AMAT
```

```
     5        ,SINA,COSA,R,E,G,ES,ESS,GS,GSS
     6       ,CI,CA,CIA)
      DO=(FD-FNOR1)/SD
      WRITE(11, 100 ) TA,DO,FD,FNOR1
      IF ( DO ) 150 , 180 , 160
  150 CONTINUE
      T=TA
      D1=DO
      IF ( ME .GT. 0. ) GOTO 170
      TA=TA+TA
      ME=ME-1
      IF ( ME .GT. -8 ) GOTO 120
      S=T
      D2=D1
      T=0.
      D1=GR
      WRITE(11, 100 ) ME,S,T
      ME=1
      GOTO 120
  160 CONTINUE
      ME=1
      S=TA
      D2=DO
  170 CONTINUE
      IF ( FNOR1 .LE. F0 ) AF=AF+1.
      PL=D2*(S-T)/(D1-D2)
      TA=S+PL
      IF ( AF .LT. IZ ) GOTO 120
  180 CONTINUE
      VG=TA
      DO 190 K=1,M
      AINEU(K)=AI(K)+VG*AISCHR(K)
  190 CONTINUE
      CALL REFEHL($ 210 ,$ 220 ,AINEU,F0    ,M,NP,LP,AKPP
     1        ,DRUCK,DRUCK0,GESTRO,VOL,CWAQ,STADI
     2        ,STRIDS,STRADS,RI,RIP,JC,VOL0
     3        ,XI,XIP,YI,YIP,XA,XAP,YA,YAP
     4        ,KIA,KAI,KIS,KISS,AHI,AMAT
     5        ,SINA,COSA,R,E,G,ES,ESS,GS,GSS
     6        ,CI,CA,CIA)
      WRITE(11, 100 ) VG,F0
      RETURN
  200 CONTINUE
  210 CONTINUE
      RETURN 1
  220 CONTINUE
      WRITE(11, 100 ) GR,S,VG,F0
      RETURN 2
      END
```

```
      SUBROUTINE REFEHL(*,*,AI,FFUN,NR,NP,LP,AKPP
     1   ,DRUCK,DRUCK0,GESTRO,VOL,CANT,STADI
     2   ,STRIDS,STRADS,RI,RIP,JC,VOL0
     3   ,XI,XIP,YI,YIP,XA,XAP,YA,YAP
     4   ,KIA,KAI,KIS,KISS,AHI,AMAT
     5   ,SINA,COSA,R,E,G,ES,ESS,GS,GSS
     6   ,CI,CA,CIA)
      DIMENSION AI(1),STADI(1),V(2)
     1  ,STRIDS(1),STRADS(1),RI(1),RIP(1)
     2   ,XI(1),XIP(1),YI(1),YIP(1),XA(1),XAP(1)
     3  ,YA(1),YAP(1),AMAT(NP2,NP3)
  100 FORMAT(' ****   SINGULAERE MATRIX   ****')
C
C    ------------------------------------------------------------
C    * DAS UNTERPROGRAMM REFEHL ERRECHNET DIE WERTE DER FEHLERFUNKION  *
C    * ZU EINEM VORGEGEBENEN INNEREN RAND UND SPEICHERT SIE IN         *
C    * FFUN. DER RAND IST DABEI GEGEBEN DURCH DIE KOEFFIZIENTEN DER    *
C    * COSINUSREIHE SEINER DARSTELLUNG IN TORUSKOORDINATEN BEZUEGLICH  *
C    * DES PUNKTES (AI(1),0), DIE IN AI(2),AI(3),... GESPEICHERT SIND  *
C    ------------------------------------------------------------
C
      N=NP/2
      NP2=NP+2
      NP3=NP+3
      M=N+1
      XMI=AI(1)
      CQAQ=CANT*(GESTRO/(6.2831853*AI(2)))**2
C
C   *** DAS UNTERPROGRAMM KOORD BERECHNET AUS DEN AI DIE TORUSKOOR- ***
C   *   DINATEN DER STUETZPUNKTE DES INNEREN RANDES SOWIE DEREN      *
C   *   ABLEITUNGEN. DIE ANZAHL DER STUETZPUNKTE IST DURCH NP        *
C   *** GEGEBEN.                                                    ***
C
      CALL KOORD(S 150 ,AI,NR,RI,RIP,COSA,SINA,NP)
C
C    ***   BERECHNUNG DER RANDWERTE AUS DIV=ROT=0   ***
C
C   *** REKART BERECHNET AUS DEN TORUSKOORDINATEN DER STUETZPUNKTE  ***
C   *   UND DEREN ABLEITUNGEN DIE KARTESISCHEN KOORDINATEN UND DEREN  *
C   ***       ABLEITUNGEN.                                          ***
C
      CALL REKART(RI,RIP,XMI,XI,XIP,YI,YIP
     1   ,SINA,COSA,NP)
C
C   *** DIE UNTERPROGRAMME REKERS UND REKER BERECHNET DIE WERTE DES ***
C   *   INTEGRALKERNS AN DEN STUETZSTELLEN DES RANDES, DAS UNTER-     *
C   *   PROGRAMM MATRIX BERECHNET HIERAUS DIE KOEFFIZIENTENMATRIX     *
C   *   DES LINEAREN GLEICHUNGSSYSTEMS, DAS SICH DURCH DISKRETI-      *
C   *   SIERUNG DER INTEGRALGLEICHUNG ERGIBT. DIE SYMMETRIE DER       *
C   *   KONFIGURATION WIRD ZUR VERKLEINERUNG DES GLEICHUNGSSYSTEMS    *
C   ***       GENUTZT.                                              ***
C
      CALL REKERS(KIS,KISS,XI,XIP,YI,YIP,ES,ESS
     1   ,GS,GSS,COSA,NP,LP)
      CALL REKER(  ,XA,XAP,YA,YAP,XI,XIP
     1   ,YI,YIP,KIA,KAI,NP,LP)
      GE=GESTRO
      CALL MATRIX(GE,KIS,KISS,KIA,KAI
     1   ,AMAT,AHI,R,E,CA,CIA,NP,M)
C
C   *** DAS UNTERPROGRAMM GJR LOEST LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME MIT   ***
C   *   DEM VERFAHREN VON GAUSS - JORDAN. DIE KOEFFIZIENTENMATRIX     *
```

```
C  *** WIRD DABEI ZERSTOERT.                                          ***
C
      V(1)=4.
      CALL GJR(AMAT,NP3,NP2,NP2,NP3,$ 110 ,JC,V)
      GOTO 120
  110 CONTINUE
C
C  ***  HIERHIN VERZWEIGT DAS PROGRAMM, FALLS DIE MATRIX AMAT          ***
C  ***  SINGULAER IST.                                                 ***
C
      WRITE(6, 100 )
      RETURN 1
  120 CONTINUE
C
C  *** DER VEKTOR STRIDS NIMMT DIE WERTE DER TANGENTIALKOMPONENTE      ***
C  *   DER LOESUNG DES NEUMANNPROBLEMS IM VAKUUMGEBIET AN DEN          *
C  *   STUETZSTELLEN DES INNEREN RANDES AUF, STRADS DIE WERTE AN       *
C  *** DEN AUF DEM AEUSSEREN RAND GELEGENEN STUETZSTELLEN              ***
C
      DO 130 K=1,N
      STRIDS(K)=AMAT(K,NP3)
      STRIDS(NP-K)=STRIDS(K)
      STRADS(K)=AMAT(K+N,NP3)
      STRADS(NP-K)=STRADS(K)
  130 CONTINUE
      STRIDS(NP)=AMAT(N,NP3)
      STRADS(NP)=AMAT(NP2,NP3)
C
C   ***   BERECHNUNG DER RANDWERTE AUS DRUCK   ***
C
C  *** DER FOLGENDE PROGRAMMTEIL BERECHNET FUER DIE STUETZSTELLEN      ***
C  *   DES INNEREN RANDES DEN WERT DER TANGENTIALKOMPONENTE DES        *
C  *   MAGNETFELDES, DER NOETIG WAERE, UM DEN STATISCHEN DRUCK ZU      *
C  *   KOMPENSIEREN. CDAQ GIBT DABEI DEN AZIMUTALEN ANTEIL DES        *
C  *   FELDES AN, DIE DIFFERENZ ZWISCHEN DIESEM UND DEM OBEN BERECH-   *
C  *   NETEN TATSAECHLICHEN WERT ERGIBT DANN DIE FEHLERFUNKTION,       *
C  *   AUS DER DER WERT DES FEHLERFUNKTIONALS FFUN BERECHNET WIRD.     *
C  *** DSI IST DABEI DAS LINIENELEMENT.                                ***
C
      CALL VOLUME(VOL,RI,XNI,COSA,NP)
      DRUCK=DRUCK*(VOLO/VOL)**AKPP
      ST=DRUCK*.49E12/3.1415627
      DO 140 K=1,NP
      DSI=SQRT(RI(K)**2+RIP(K)**2)
      STADI(K)=SQRT(ST-CDAQ/XI(K)**2)
      STRADS(K)=STRADS(K)*NP/(6.2831853*YAP(NP))
      STRIDS(K)=STRIDS(K)*NP/(6.2831853*DSI)
       FFUN=FFUN+(STADI(K)-STRIDS(K))**2
      SU=SU+STADI(K)**2
  140 CONTINUE
      FFUN=SQRT(FFUN/SU)
      SU=2.
      RETURN
  150 CONTINUE
      RETURN 2
      END
```

```
      SUBROUTINE MATRIX(REST,KIS,KISS,KIA,KAI
     1  ,AMAT,AHI,R,CI,CA,CAI,NP,M)
      NP2=NP+2
      N=NP/2
      NP3=NP+3
      DIMENSION CI(NP),CA(NP),CAI(NP)
     1 ,R(1),KIS(NP,NP),KISS(NP,NP),KIA(NP,NP),KAI(NP,NP)
     2  ,AMAT(NP2,NP3),AHI(M,M)
      REAL KIS,KISS,KIA,KAI
C     ------------------------------------------------------------------
C     DAS UNTERPROGRAMM MATRIX BERECHNET DIE KOEFFIZIENTEN DER MATRIX DES
C     GLEICHUNGSSYSTEMS ZUR NAEHERUNGSWEISEN LOESUNG DER INTEGRAL-
C     GLEICHUNG UND SPEICHERT SIE IN DEM FELD AMAT. DIE VON DER FORM
C     DES INNEREN RANDES UNABHAENGIGEN KOEFFIZIENTEN WERDEN DABEI VON DEM
C     FELD AHI UEBERNOMMEN. DIE FELDER KIA, KAI,  KIS UND KISS ENT-
C     HALTEN DABEI DIE BENOETIGTEN WERTE DER KERNFUNKTION, DER VEKTOR
C     R ENTHAELT DIE GEWICHTE DER FORMEL FUER DIE INTEGRATION DER
C     KERNFUNKTION IM CAUCHYSCHEN HAUPTWERT, UND CI, CA SOWIE CAI SIND
C     HILFSVEKTOREN
C     ------------------------------------------------------------------
      N1=N-1
      DO 130 I2=1,M
      I1=I2
      IF ( I2 .EQ. M ) I1=NP
      ADI1=0.
      ADI2=0.
      ANDI=0.
      ANDA=0.
      DO 110 J1=1,NP
      IF (I1-J1) 100 , 110 , 100
  100 CONTINUE
      K1=IABS(I1-J1)
      ADI1=ADI1+KIS(J1,I1)
      ADI2=ADI2+R(K1)*KISS(J1,I1)
      ANDI=ANDI-KIA(J1,I1)
      ANDA = ANDA+KAI(J1,I1)
      CI(J1)=-KIS(I1,J1)/NP-R(K1)*KISS(I1,J1)
      CA(J1)=KIA(I1,J1)/NP
      CAI(J1)=-KAI(I1,J1)/NP
  110 CONTINUE
      CA(I1)=ANDI/NP
      CI(I1)=ADI1/NP+ADI2
      CAI(I1)=ANDA/NP-2.
      DO 120 J1=1,N1
      AMAT(I2,J1)=CI(J1)+CI(NP-J1)
      AMAT(I2,J1+N)=CA(J1)+CA(NP-J1)
      AMAT(I2+M,J1)=CAI(J1)+CAI(NP-J1)
      AMAT(I2+M,J1+N)=AHI(I2,J1)
  120 CONTINUE
      AMAT(I2,N)=CI(N)
      AMAT(I2,N)=CI(NP)
      AMAT(I2,N+N)=CA(N)
      AMAT(I2,NP2)=CA(NP)
      AMAT(I2+M,N)=CAI(N)
      AMAT(I2+M,M)=CAI(NP)
      AMAT(I2+M,N+N)=AHI(I2,N)
      AMAT(I2+M,NP2)=AHI(I2,M)
      AMAT(I2,NP3)=0.
      AMAT(I2+M,NP3)=0.
  130 CONTINUE
      DO 140 J1=1,N1
      AMAT(M,J1)=2.
```

```
      AMAT(M,J1+M)=0.
  140 CONTINUE
      AMAT(M,N)=1.
      AMAT(M,M)=1.
      AMAT(M,M+N)=0.
      AMAT(M,NP2)=0.
      AMAT(M,NP3)=GEST
      RETURN
      END




      SUBROUTINE REHNEU(*,R,G,AH,Z,M,N)
  100 FORMAT('0 DAS OPTIMIERUNGSVERFAHREN BRACH AB')
      DIMENSION R(M),G(M),Z(M),AH(N,N)
C     ---------------------------------------------------------------
C     DAS UNTERPROGRAMM REHNEU BERECHNET IN JEDEM ITERATIONSSCHRITT
C     DES D-F-P - VERFAHRENS DIE NEUE MATRIX DER METRIK AUS DER ALTEN
C     MATRIX AH, DER AENDERUNG DES GRADIENTEN G UND DER AENDERUNG DES
C     ARGUMENTS R BEIM LETZTEN SCHRITT. Z IST DABEI EIN HILFSVEKTOR.
C     ---------------------------------------------------------------
      DO 120 I=1,M
      S=0.
      DO 110 K=1,M
      S=S+AH(I,K)*G(I)
  110 CONTINUE
      Z(I)=S
  120 CONTINUE
      FH=0.
      FG=0.
      DO 130 KR=1,M
      FH=FH+G(KR)*Z(KR)
      FG=FG+G(KR)*R(KR)
  130 CONTINUE
      IF ( ABS(FH) .LE. 1.E-6 ) GOTO 150
      IF ( ABS(FG) .LE. 1.E-6 ) GOTO 150
      FH=1./FH
      FG=1./FG
      DO 140 KR=1,M
      DO 140 IR=1,M
      AH(KR,IR)=AH(KR,IR)-FH*Z(KR)*Z(IR)-FG*R(KR)*R(IR)
  140 CONTINUE
      RETURN
  150 CONTINUE
      WRITE(6, 100 )
      RETURN 1
      END
```

```
      SUBROUTINE REKERS(KS,KSS,X,XP,Y,YP,ES,ESS
     1  ,GS,GSS,COSA,NP,LP)
      DIMENSION KS(NP,NP),KSS(NP,NP),
     1          X(1),XP(1),Y(1),YP(1)
     2   ,ES(1),ESS(1),GS(1),GSS(1),COSA(1)
      REAL KS,KSS
C     ------------------------------------------------------------
C     DAS UNTERPROGRAMM REKERS BERECHNET DIE WERTE DER INTEGRALKERNE
C     K* UND K** AN DEN STUETZSTELLEN DES RANDES JEWEILS FUER DEN
C     AEUSSEREN UND INNEREN RAND UND SPEICHERT DIE WERTE IN DIE FELDER
C     KS UND KSS EIN. DIE VEKTOREN X UND Y ENTHALTEN DIE KOORDINATEN
C     DER STUETZSTELLEN DES RANDES, XP UND YP DIE ABLEITUNGEN DAZU.
C     ES, ESS, GS UND GSS ENTHALTEN DIE TABELLEN DER FUNKTIONEN E*, E**,
C     G* UND G**, DIE IN ELINT BERECHNET WURDEN. NP IST DIE ANZAHL DER
C     STUETZSTELLEN DES RANDES, PINTER EINE INTERPOLATIONSROUTINE.
C     ------------------------------------------------------------
      DO 120 I=1,NP
      DO 110 K=1,NP
      IF ( I-K ) 100 , 110 , 100
  100 HI1=(X(I)+X(K))**2+(Y(I)-Y(K))**2
      HI2=HI1-4.*X(I)*X(K)
      AMOD=4.*X(I)*X(K)/HI1
      AKU=2.*(((X(I)-X(K))*YP(I)-(Y(I)-Y(K))*XP(I)))/HI2
      QU=((Y(I)-Y(K))*XP(I)-X(I)*YP(I))/(X(I)*X(K))
      AES =PINTER(ES ,AMOD,LP)
      AGS =PINTER(GS ,AMOD,LP)
      AGSS=PINTER(GSS,AMOD,LP)
      AESS=PINTER(ESS,AMOD,LP)
      J=IABS(I-K)
      FAC=32.*HI1/HI2*(1.-COSA(J))
      FA=LOG(FAC)*.5
      AESL=AES+AESS*FA
      AGSL=AGS+AGSS*FA
      FAC=SQRT(AMOD*X(K)/X(I))
      KS(I,K)=FAC*(AESL*AKU+AGSL*QU)
      KSS(I,K)=-FAC*(AESS*AKU+AGSS*QU)*.5
  110 CONTINUE
  120 CONTINUE
      RETURN
      END




      FUNCTION QNOR(F,NP)
      DIMENSION F(NP)
C     ------------------------------------------------------------
C     DAS UNTERPROGRAMM QNOR BERECHNET DIE QUADRATNORM EINES VEKTORS F
C     DER LAENGE NP.
C     ------------------------------------------------------------
      Q=0.
      DO 100 K=1,NP
      Q=Q+F(K)*F(K)
  100 CONTINUE
      QNOR=SQRT(Q)
      RETURN
      END
```

XV

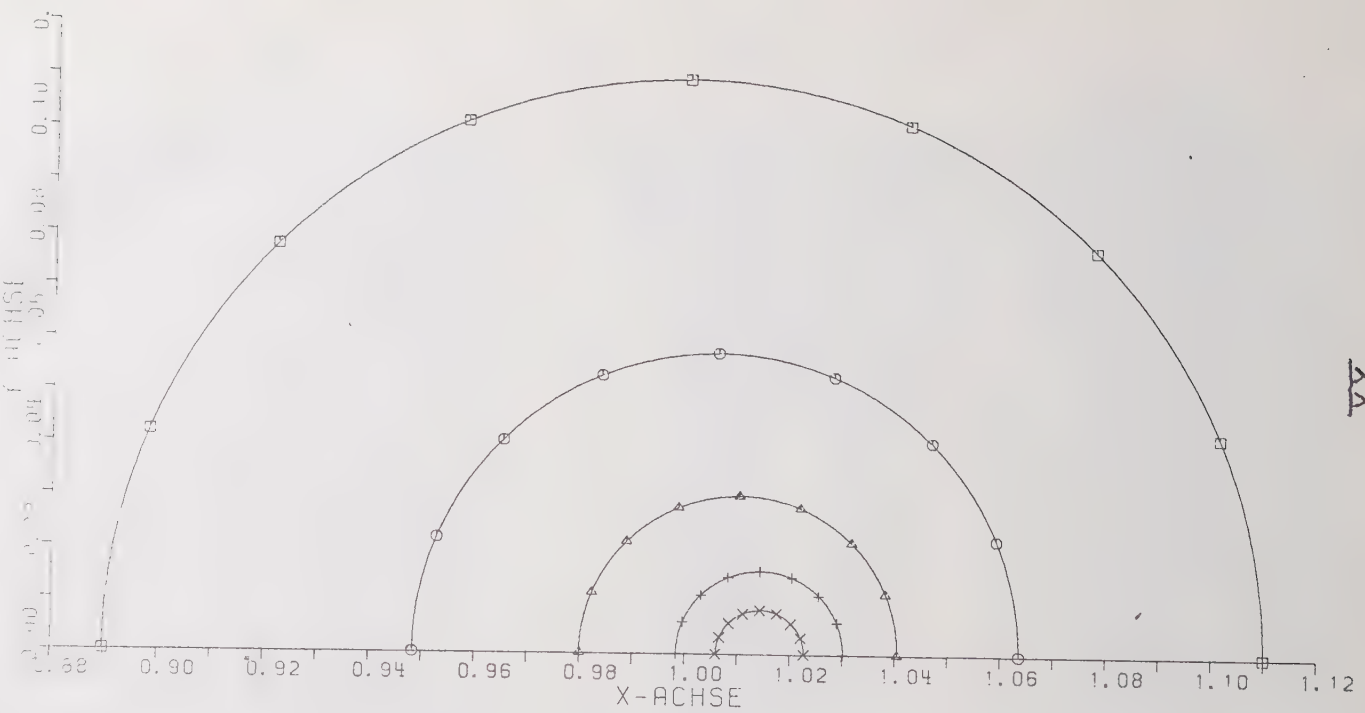
```
      SUBROUTINE GEWI(SINA,COSA,R,N)
      NP=2*N
      DIMENSION SINA(NP),COSA(NP),R(NP)
C     ------------------------------------------------------------------
C     DAS UNTERPROGRAMM GEWI BERECHNET FUNKTIONSTABELLEN FUER SINUS UND
C     COSINUS SOWIE DIE GEWICHTE DER INTEGRATIONSFORMEL ZUR NAEHERUNGS-
C     WEISEN INTEGRATION DER KERNFUNKTION IM CAUCHYSCHEN HAUPTWERT.
C     DIE GEWICHTE WERDEN IM VEKTOR R GESPEICHERT.
C     ------------------------------------------------------------------
      N1=N-1
      Y=3.14159265/N
      X=0
      MZ=N*.5-1
      M1=MZ+1
      DO 100 K=1,MZ
      X=X+Y
  100 COSA(K)=COS(X)
      COSA(M1 )=0
      COSA(N)=-1
      DO 110 K=1,MZ
  110 COSA(N-K)=-COSA(K)
      DO 120 K=1,N
  120 COSA(N+K)=-COSA(K)
      SINA(M1 )=1.
      DO 130 K=1,MZ
  130 SINA(K)=-COSA(M1+K)
      J=2*N
      L=J-MZ
      DO 140 K=2,L
  140 SINA(K+MZ)=COSA(K-1)
      F=.5
      SU=0.
      DO 170 K=1,N
      F=-F
      R1=0
      SU=SU+1./K
      DO 150 I1=1,N1
      K1=K*I1
      K1=MOD(K1,J)
      IF ( K1 .EQ. 0 ) K1=J
      XC=COSA(K1)
  150 R1=R1+XC/I1
      R(K)=-(R1+F/N)/N
  160 I=2*N-K
      R(I)=R(K)
  170 CONTINUE
      R(2*N)=( .5/N-SU)/N
      RETURN
      END
```

```
      FUNCTION PINTER(A,B,LP)
C     ------------------------------------------------------------------
C     DIE FUNKTION PINTER BERECHNET AUS EINER IN A GESPEICHERTEN
C     FUNKTIONSTABELLE EINER DER FUNKTIONEN E, G, FS, GS, ESS ODER GSS
C     UND AUS EINEM ARGUMENT B DEN ZUGEHOERIGEN FUNKTIONSWERT DURCH
C     POLYNAMINTERPOLATION.
C     ------------------------------------------------------------------
      LP1=LP-1
      LP2=LP-2
      DIMENSION A(LP)
  100 FORMAT('0  ***** TABELLE ZU KLEIN ***** ')
      HIL=(B-1.)*1000.+LP1
      MI=INT(HIL)
      HIL=HIL-MI
      MI=MI+1
      IF ( MI .GT. 1 ) GOTO 110
      WRITE(6, 100 )
      STOP
  110 IF ( MI .LT. LP2) GOTO 130
      IF (A(LP)-10.) 120 , 120 , 150
  120 HIL=HIL+MI-LP2
      MI=LP2
  130 PO1=((HIL-3.)*HIL+2.)*HIL/6.
      PO2=(((HIL-2.)*HIL-1.)*HIL+2.)*.5
      PO3=((HIL-1.)*HIL-2.)*HIL*.5
      PO4=(HIL*HIL-1.)*HIL/6.
      PINTER=PO2*A(MI)+PO4*A(MI+2)-PO1*A(MI-1)-PO3*A(MI+1)
  140 RETURN
  150 HF=1.-B
      HIL=1.3862944-.5*LOG(HF)
      PINTER=-1.+.0390625*HF*HF+(1.-HF*(.25+.046875*HF))*HIL
      RETURN
      END
       IF ( FNORI .LE. 2.*F0 ) AF=AF+1.




      SUBROUTINE VOLUME(VOL,RI,XMITT,COSA,NP)
      DIMENSION RI(1),COSA(1)
C     ------------------------------------------------------------------
C     DAS UNTERPROGRAMM VOLUME BERECHNET DAS VOLUMEN EINES TORUS, DESSEN
C     RAND IN TORUSKOORDINATEN BESCHRIEBEN WIRD DURCH EINE FUNKTION R,
C     DEREN WERTE AN DEN STUETZSTELLEN 2*PI*I/NP, I=1,...,NP  IM VEKTOR
C     RI GESPEICHERT SIND.
C     ------------------------------------------------------------------
      S1=0.
      S2=0.
      DO 100 K=1,NP
      S1=S1+RI(K)**2
      S2=S2+RI(K)**3*COSA(K)
  100 CONTINUE
      VOL=S1*XMITT*3.141592?+S2*2.?83951
      VOL=VOL/NP*6.2831853
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE MAFEST(AHI,R,KAS,KASS,CA,NP,M)
      DIMENSION CA(1),R(1),AHI(M,M),KAS(NP,NP),KASS(NP,NP)
      REAL KAS,KASS
C     ------------------------------------------------------------------
C     DAS UNTERPROGRAMM MAFEST BERECHNET DEN VON DER FORM DES INNEREN
C     RANDES UNABHAENGIGEN TEIL DER KOEFFIZIENTENMATRIX DES GLEICHUNGS-
C     SYSTEMS ZUR NAEHERUNGSWEISEN LOESUNG DER INTEGRALGLEICHUNG UND
C     SPEICHERT IHN IN DEM FELD AHI. DER VEKTOR R ENTHAELT DABEI DIE
C     GEWICHTE DER VERWANDTEN INTEGRATIONSFORMEL ZUR BERECHNUNG DES
C     AUFTRETENDEN INTEGRALS IM CAUCHYSCHEN HAUPTWERT. DIE FELDER KAS UND
C     KASS ENTHALTEN DIE WERTE DER KERNFUNKTIONEN, UND CA IST EIN HILFS-
C     VEKTOR DER LAENGE NP.
C     ------------------------------------------------------------------
      N=NP/2
      N1=N-1
      DO 130 IH=1,M
      I=IH
      IF ( I .EQ. M ) I=NP
      ADA1=0.
      ADA2=0.
      DO 110 J=1,NP
      IF (I-J) 100 , 110 , 100
  100 CONTINUE
      K=IABS(I-J)
      ADA1=ADA1-KAS(J,I)
      ADA2=ADA2-R(K)*KASS(J,I)
      CA(J)=KAS(I,J)/NP+R(K)*KASS(I,J)
  110 CONTINUE
      CA(I)=ADA1/NP+ADA2+2.
      DO 120 J=1,N1
      AHI(IH,J)=CA(J)+CA(NP-J)
  120 CONTINUE
      AHI(IH,M)=CA(NP)
      AHI(IH,N)=CA(N)
  130 CONTINUE
      RETURN
      END




      SUBROUTINE REKART(R,RP,XM,X,XP,Y,YP,SINA,COSA,NP)
      DIMENSION R(1),RP(1),X(1),XP(1),Y(1),YP(1)
     1 ,SINA(1),COSA(1)
C     ------------------------------------------------------------------
C     DAS UNTERPROGRAMM REKART BERECHNET AUS DEN TOROIDALEN KOORDINATEN
C     VON PUNKTEN EINER KURVE IN DER X-Y-EBENE BEZUEGLICH DES PUNKTES
C     (XM,0) UND DEREN ABLEITUNGEN NACH DEM WINKEL DIE KARTESISCHEN
C     KOORDINATEN DIESER PUNKTE SOWIE DEREN ABLEITUNGEN NACH DEN WINKEL.
C     ------------------------------------------------------------------
      DO 100 K=1,NP
      X(K)=R(K)*COSA(K)+XM
      Y(K)=R(K)*SINA(K)
      XP(K)=RP(K)*COSA(K)-Y(K)
      YP(K)=RP(K)*SINA(K)+X(K) -XM
  100 CONTINUE
      RETURN
      END
```

```
      SUBROUTINE REKER(E,G,XA,XAP,YA,YAP,XI,XIP
     1   ,YI,YIP,KIA,KAI,NP,LP)
      DIMENSION E(1),G(1),KIA(NP,NP),KAI(NP,NP)
     1 ,XA(1),XAP(1),YA(1),YAP(1),XI(1),XIP(1)
     2 ,YI(1),YIP(1)
      REAL KIA,KAI
C     ------------------------------------------------------------------
C     DAS UNTERPROGRAMM REKER BERECHNET DIE WERTE DER INTEGRALKERNE
C     KIA UND KAI, FUER DIE AUFPUNKT UND INTEGRATIONSPUNKT NICHT AUF
C     DEMSELBEN RAND LIEGEN KOENNEN, UND SPEICHERT DIE WERTE IN DIE
C     FELDER KIA BZW. KAI EIN. DIE KOORDINATEN DER STUETZPUNKTE DES
C     AEUSSEREN RANDES SIND XA UND YA, IHRE ABLEITUNGEN XAP UND YAP;
C     ENTSPRECHEND FUER DEN INNEREN RAND XI USW.. DIE VEKTOREN E UND G
C     ENTHALTEN TABELLEN DER GLEICHNAMIGEN ELLIPTISCHEN INTEGRALE. NP
C     IST DIE ANZAHL DER STUETZSTELLEN AUF DEM RAND, PINTER EINE
C                          INTERPOLATIONSROUTINE.
C     ------------------------------------------------------------------
      DO 100 I=1,NP
      DO 100 K=1,NP
      AMOD=4.*XI(I)*XA(K)
      AMOD=AMOD/((XI(I)+XA(K))**2+(YI(I)-YA(K))**2)
      AKU=2.*((XI(I)-XA(K))*YIP(I)-(YI(I)-YA(K))*XIP(I))
      AKU=AKU/((XI(I)-XA(K))**2+(YI(I)-YA(K))**2)
      QU=((YI(I)-YA(K))*XIP(I)-XI(I)*YIP(I))/(XI(I)*XA(K))
      AE=PINTER(E,AMOD,LP)
      AG=PINTER(G,AMOD,LP)
      KIA(I,K)=SQRT(AMOD*XA(K)/XI(I))*(AE*AKU+AG*QU)
      AKU=2.*((XA(K)-XI(I))*YAP(K)-(YA(K)-YI(I))*XAP(K) )
      AKU=AKU/((XA(K)-XI(I))**2+(YA(K)-YI(I))**2)
      QU=((YA(K)-YI(I))*XAP(K)-XA(K)*YAP(K))/(XA(K)*XI(I))
      KAI(K,I)=SQRT(AMOD*XI(I)/XA(K))*(AE*AKU+AG*QU)
  100 CONTINUE
      RETURN
      END




      SUBROUTINE RANDA(XMA,XA,XAP,YA,YAP,SINA,COSA,VOL,NP)
      DIMENSION XA(1),XAP(1),YA(1),YAP(1)
     1 ,SINA(1),COSA(1)
C     ------------------------------------------------------------------
C     DAS UNTERPROGRAMM RANDA BERECHNET DIE CARTESISCHEN KOORDINATEN UND
C     DEREN ABLEITUNGEN SOWIE DAS VOLUMEN DES AEUSSEREN RANDES. DABEI
C     WIRD DER RAND ANGENOMMEN ALS ELLIPSE MIT MITTELPUNKT (XMA,0.)
C     MIT EINER WAAGERECHTEN ACHSE DER LAENGE 2*RADX UND EINER
C     SENKRECHTEN ACHSE DER LAENGE 2*RADY.
C     ------------------------------------------------------------------
  100 FORMAT( )
      READ(5, 100 ) XMA,RADX,RADY
      VOL=XMA*RADX*RADY*2*3.1415927**2
      DO 110 K=1,NP
      XA(K)=RADX*COSA(K)
      YA(K)=RADY*SINA(K)
      XAP(K)=-RADX*SINA(K)
      YAP(K)=RADY*COSA(K)
      XA(K)=XA(K)+XMA
  110 CONTINUE
      RETURN
      END
```

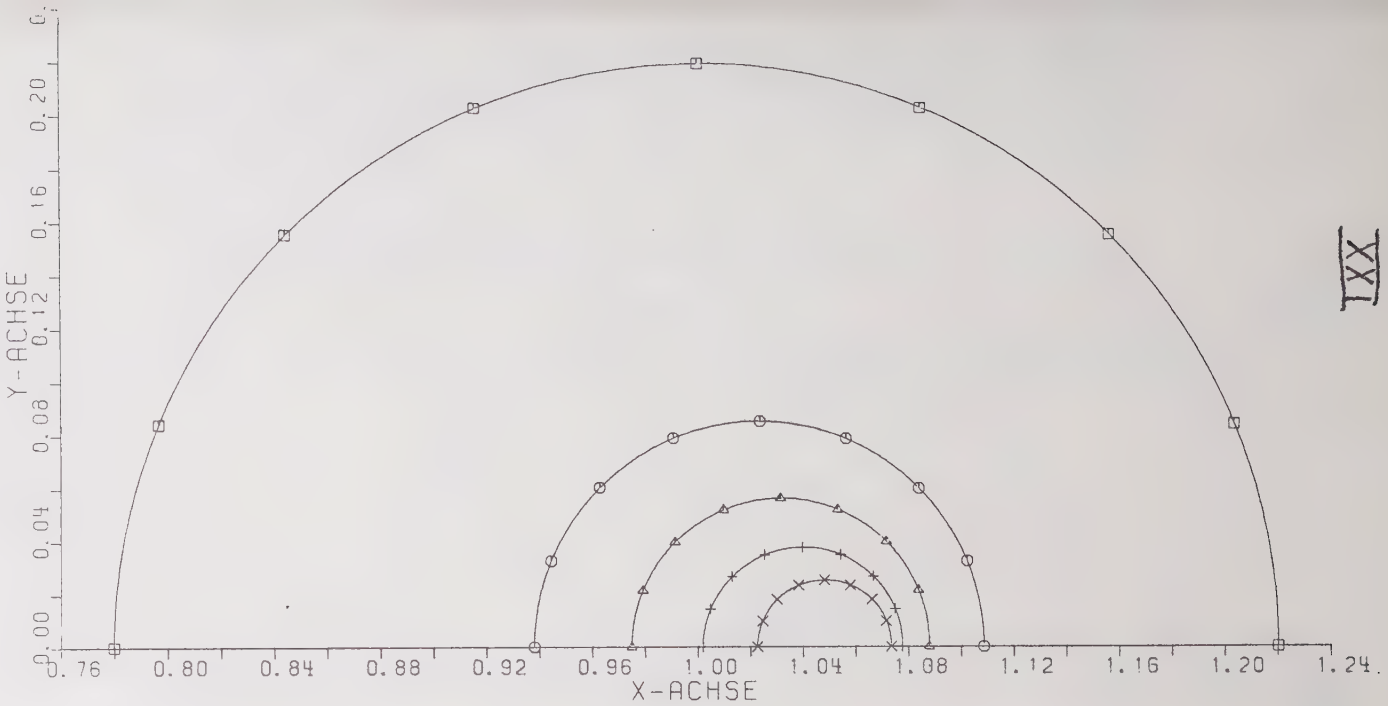
```
      SUBROUTINE ELINT(E,G,ES,ESS,GS,GSS,LP)
      PARAMETER LG=20
      DIMENSION E(1),G(1),ES(1),ESS(1),GS(1),GSS(1)
      DIMENSION EP(LG),EPS(LG),GA(LG),GAM(LG)
C     ------------------------------------------------------------------
C     DAS UNTERPROGRAMM ELINT BERECHNET TABELLEN DER ELLIPTISCHEN
C     INTEGRALE E UND G SOWIE DER HILFSFUNKTIONEN E*, E**, G*, G** MIT
C     EINER GENAUIGKEIT VON 7 STELLEN MIT HILFE DER POTENZREIHEN FUER
C     E* ETC. SOWIE DER DARSTELLUNGEN VON E AUS E* UND E** SOWIE VON
C     G AUS G* UND G**, UND SPEICHERT DIESE TABELLEN IN DEN VEKTOREN
C     E, G, ES, ESS, GS UND GSS AB.
C     ------------------------------------------------------------------
      L1=LP-1
      NO=12
      EP(1)=1
      EPS(1)=0
      GA(1)=-1
      GAM(1)=1
      EP(2)=-.25
      EPS(2)=.5
      GA(2)=0.
      GAM(2)=-.25
      DO 100 I=3,NO
      J=I-1
      HIL = (2*J-1)*(2*J-3)
      HIJ=4*J*J
      EPS(I)=EPS(I-1)*HIL/(HIJ-4*J)
      EP(I)=EP(I-1)*HIL/(HIJ-4*J)-EPS(I-1)*(HIJ-6*J+3)/(HIJ*2*(J-1)**2)
      GAM(I)=GAM(I-1)*HIL/HIJ
  100 GA(I)=GA(I-1)*HIL/HIJ-GAM(I-1)*(4*J-3)/(HIJ*J)
      AL=L1/1000.
      AM=AL/(LP-1.)
      DO 120 K=1,L1
      X=1
      HI=0
      HL=0
      HO=0
      HR=0
      DO 110 J=1,NO
      HI=EP(J)*X+HI
      HL=EPS(J)*X+HL
      HO=GA(J)*X+HO
      HR=GAM(J)*X+HR
  110 X=X*AL
      E(K)=HI+HL*(1.3862944-.5*LOG(AL))
      G(K)=HO+HR*(1.3862944-.5*LOG(AL))
      ES(K)=HI
      ESS(K)=HL
      GS(K)=HO
      AL=AL-AM
  120 GSS(K)=HR
      ES(LP)=1.
      ESS(LP)=0.
      GS(LP)=-1.
      GSS(LP)=1.
      G(LP)=1.0000.
      E(LP)=1.
      RETURN
      END
```



XX

DER SPRUNG DES AZIMUTALEN MAGNETFELDES IST IM MITTEL
0 % DES SPRUNGES DES MERIDIONALEN FELDES

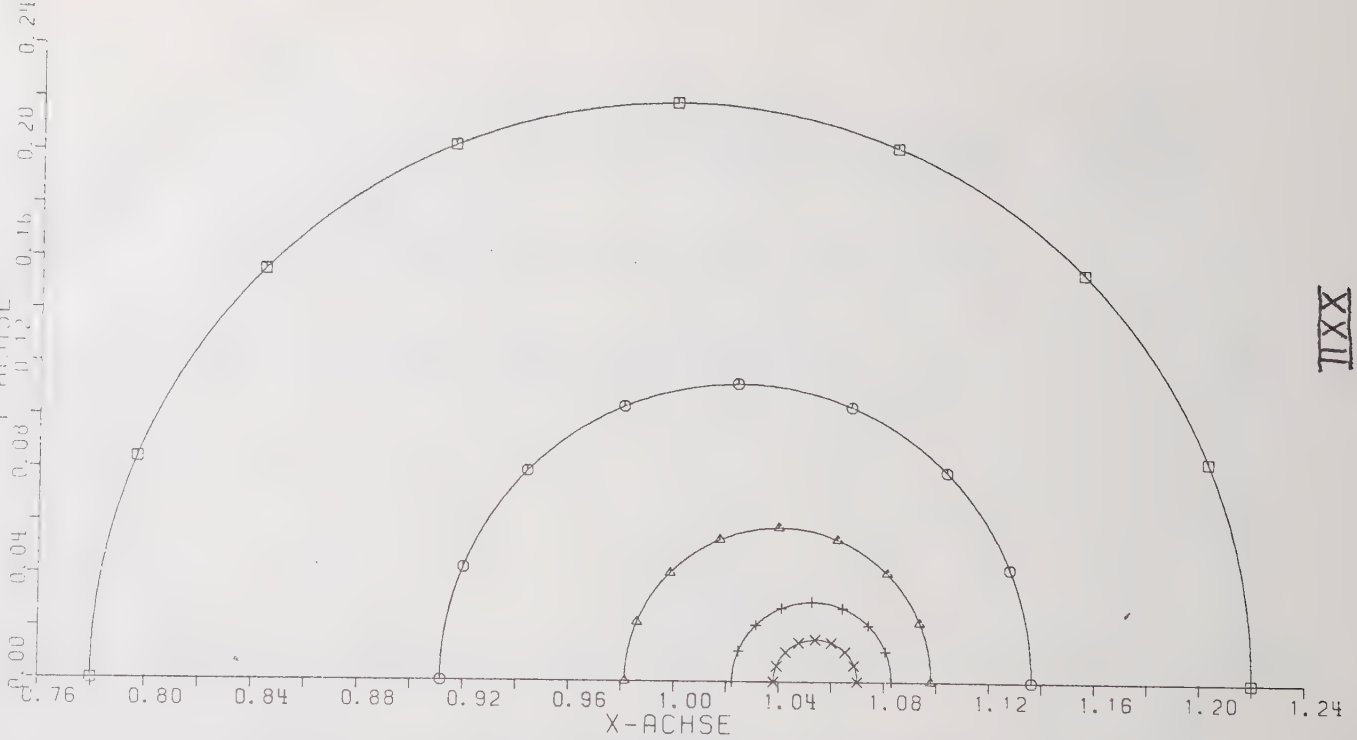
□	AEUSSERER RAND	
○	INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON	41792 A.
△	INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON	63987 A.
+	INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON	97970 A.
×	INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON	150000 A.



LXX

DER SPRUNG DES AZIMUTALEN MAGNETFELDES IST IM MITTEL -50 % DES SPRUNGES DES MERIDIONALEN FELDES

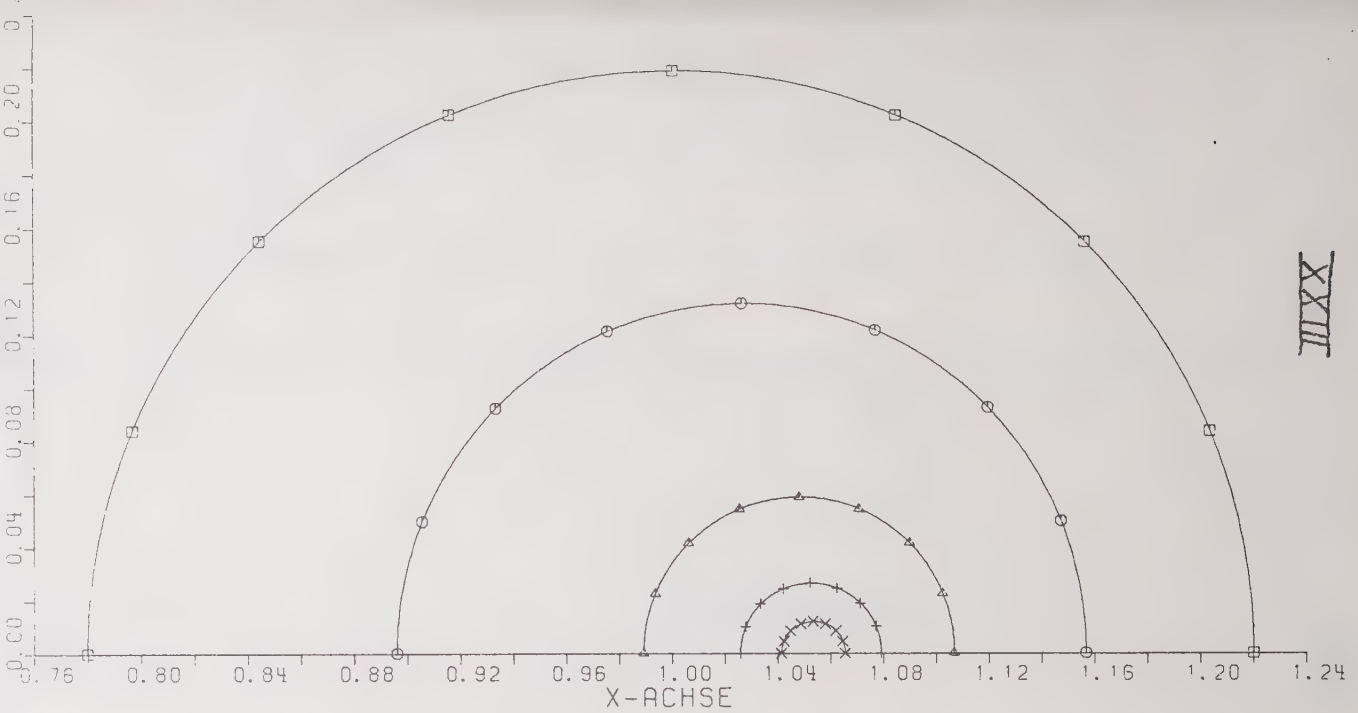
⊡	AEUSSERER RAND
⊙	INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON 140570 A.
△	INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON 180980 A.
+	INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON 233010 A.
×	INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON 300000 A.



XXII

DER SPRUNG DES AZIMUTALEN MAGNETFELDES IST IM MITTEL
0 % DES SPRUNGES DES MERIDIONALEN FELDES

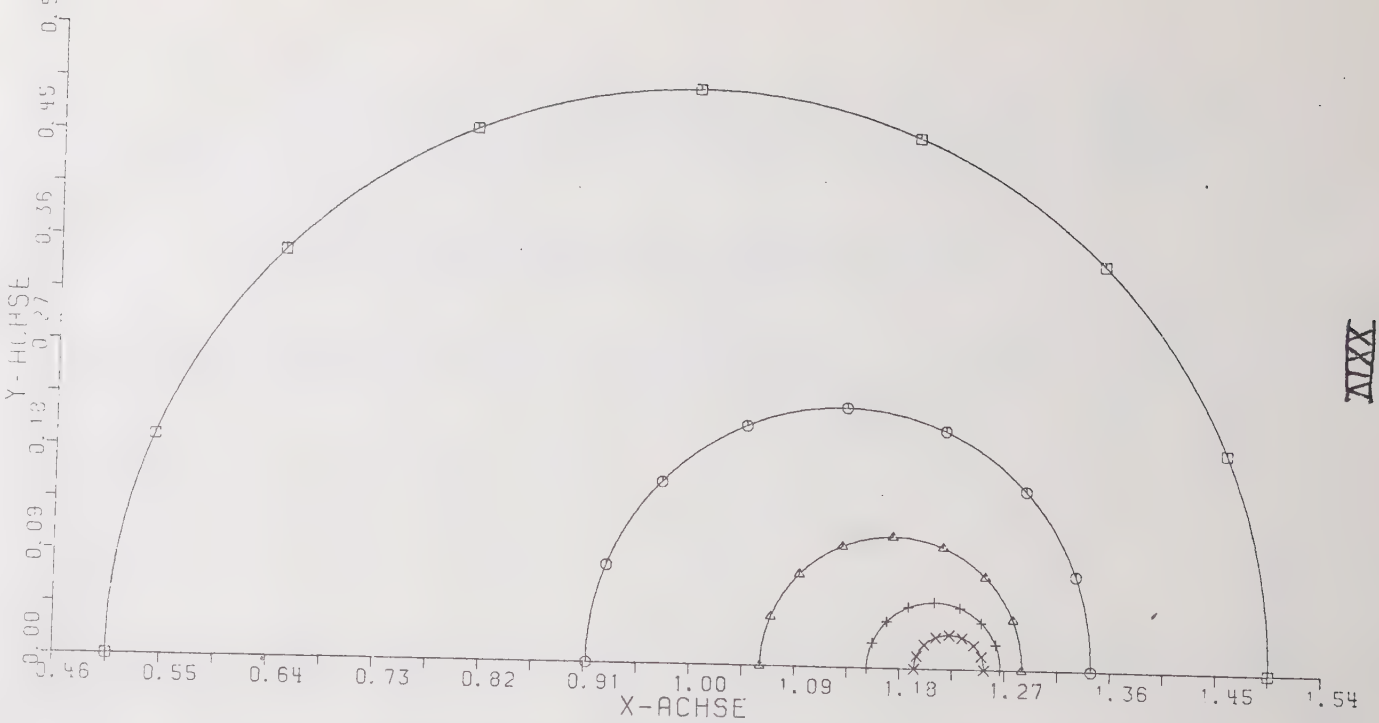
□ AEUSSERER RAND
○ INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON 83584 A.
△ INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON 127970 A.
\+ INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON 195940 A.
× INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON 300000 A.



XXIII

DER SPRUNG DES AZIMUTALEN MAGNETFELDES IST IM MITTEL
50 % DES SPRUNGES DES MERIDIONALEN FELDES

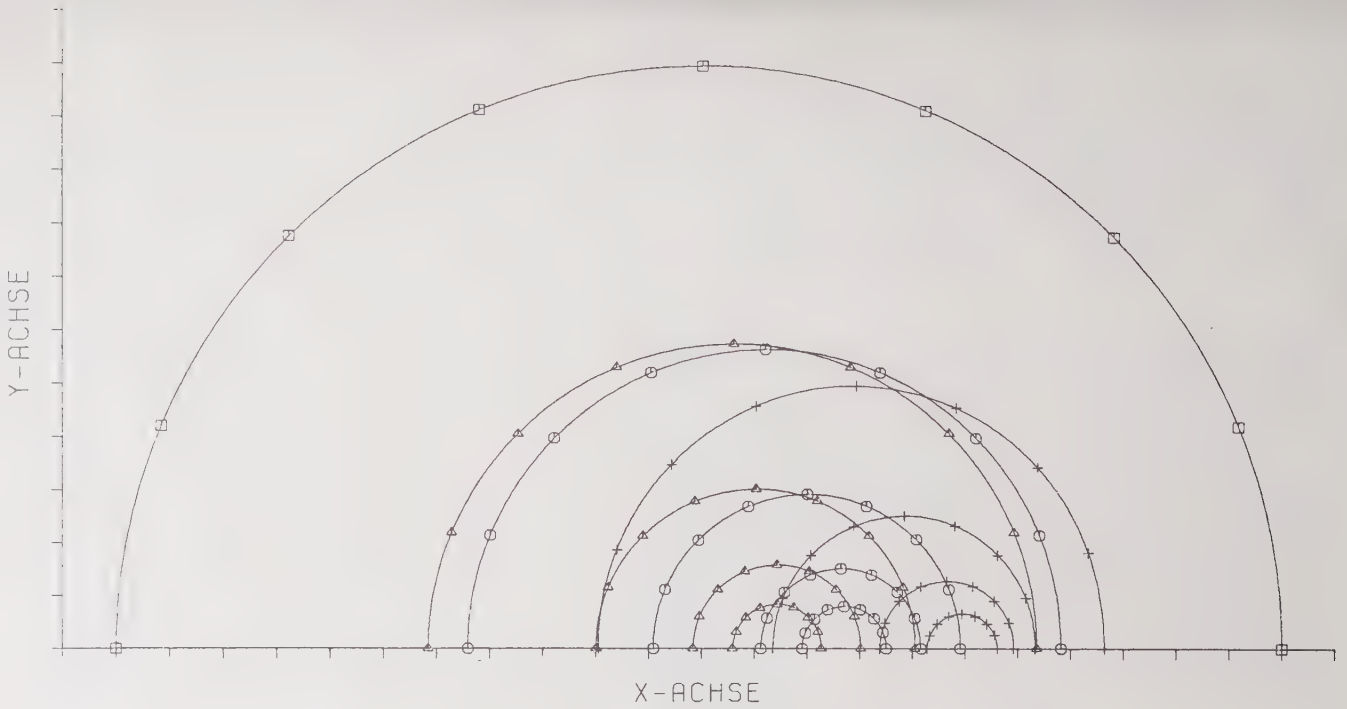
⊡	AEUSSERER RAND	
⊙	INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON	61667 A.
△	INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON	104490 A.
+	INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON	177050 A.
×	INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON	300000 A.



XXIX

DER SPRUNG DES AZIMUTALEN MAGNETFELDES IST IM MITTEL
0 % DES SPRUNGES DES MERIDIONALEN FELDES

□ AEUSSERER RAND
○ INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON 188060 A.
△ INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON 287940 A.
\+ INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON 440860 A.
× INNERER RAND ZU EINEM AZIMUTALEN STROM VON 675000 A.



XXV

□ AEUSSERER RAND
○ INNERE RAENDER ZUM AEUSSEREN RAND MIT R = 0,220 M
△ INNERE RAENDER ZUM AEUSSEREN RAND MIT R = 0,110 M
\+ INNERE RAENDER ZUM AEUSSEREN RAND MIT R = 0,495 M

L e b e n s l a u f

1.2.1947	geboren in Essen
1953 - 1957	Volksschule in Dortmund
1957 - 1963	Gymnasium in Dortmund
1.9.1963 - 31.7.1964	High-School in Harper Woods, Mich. USA als Austauschschüler
1964 - 1966	Gymnasium in Dortmund
März 1966	Abitur
1.4.1966 - 31.9.1967	Bundesgrenzschutz
Oktober 1967 - Februar 1972	Studium der Mathematik an der Universität Göttingen
Oktober 1969	Diplomvorprüfung
Februar 1972	Diplomhauptprüfung
seit 24.5.72	verheiratet mit Frau Roswitha, geb. Ringleb
seit Febr.72	wissenschaftlicher Angestellter an den Lehrstühlen für numerische und angewandte Mathematik der Universität Göttingen